Facultad de Ciencias

Escuela Politécnica Nacional

G. Rojas - S. Serrano

Ejercicios de Cálculo Diferencial

Ejercicios de Cálculo Diferencial

Germán Rojas - Sintya Serrano

Este libro ha seguido el proceso editorial de la Escuela Politécnica Nacional en el que incluye la revisión por pares anónimos.

Comité editorial: Marco Calahorrano (Editor en jefe)
Jenny Ruales (coeditora)
Cecilia Paredes
Leonardo Basile
Victor Hidalgo

Técnico Operativo: Sebastián Laverde

Transcripción a LaTeX: Sintya Serrano
Miguel Zambrano
Christian Núñez

Diseño de portadas: Dirección de Relaciones Institucionales EPN

ISBN: 978-9978-383-55-1

Publicado bajo el Sello de EPN Editorial
Vicerrectorado de Docencia Escuela Politécnica Nacional
Ladrón de Guevara E11-253
Quito-Ecuador

Primera edición: 2019
Primera impresión: 2019

© Escuela Politécnica Nacional 2019

Índice de contenidos

1. Límites **1**

1.1. Aproximación a la definición de límite . . . 1
1.2. Límites . . . 4
1.3. Continuidad e interpretación geométrica del límite . . . 11
1.4. Propiedades de límites . . . 17
1.5. Generalizaciones de las propiedades de límite . . . 20
1.6. Continuidad de funciones localmente iguales y teorema de cambio de variable . . . 23
1.7. Teorema del sánduche . . . 28
1.8. Límites unilaterales . . . 30
1.9. Límites infinitos y al infinito . . . 35

2. Derivada **45**

2.1. Motivación de la derivada . . . 45
2.2. Derivada: Definición y propiedades . . . 52
2.3. Propiedades de la derivada . . . 56
2.4. Regla de la cadena . . . 59
2.5. Razones de cambio relacionadas . . . 69
2.6. Derivación Implícita . . . 74
2.7. Derivada de la función inversa . . . 76
2.8. Derivadas de orden superior . . . 79
2.9. Diferenciales . . . 83
2.10. Cálculo de ceros de funciones derivables . . . 86

3. Aplicaciones de la derivada **91**

3.1. Monotonía, extremos y puntos críticos . . . 91
3.2. Teoremas del valor intermedio . . . 101
3.3. Convexidad y puntos de inflexión . . . 106
3.4. Graficación de Funciones . . . 114
3.5. Problemas de extremos . . . 118
3.6. Regla de L'Hopital . . . 130

Prefacio

En 2010 publicamos, conjuntamente con Juan Carlos Trujillo y Fabián Barba, el libro Cálculo en una variable-Cálculo Diferencial, cuya segunda edición se publicó en meses pasados. Dado el tamaño del libro, fue imposible incluir un número suficiente de ejercicios resueltos, lo que de alguna manera dificulta a los lectores el aprendizaje de los conceptos de Cálculo Diferencial y sobre todo de su aplicación, tarea que no puede considerarse como fácil.

Por esta razón, a fines de 2016, conjuntamente con Sintya Serrano, quien trabajaba entonces en el Departamento de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional, decidimos realizar el presente trabajo, intitulado Ejercicios de Cálculo Diferencial. Su objetivo es pues el que los lectores del libro mencionado y quienes inicien el estudio de Cálculo Diferencial, dispongan de un número suficiente de ejercicios resueltos para poder guiarse en la laboriosa tarea de aprender las técnicas de razonamiento, resolución y redacción de problemas y ejercicios relacionados con el Cálculo Diferencial.

Los ejercicios resueltos y muchos propuestos han sido tomados del libro de texto [8], y algunos ejercicios fueron tomados de los textos que se mencionan en la bibliografía. El objetivo de este trabajo no fue el de crear nuevos ejercicios, sino de presentar ejemplos de resolución de ejercicios clásicos en el Cálculo Diferencial.

Para la realización de este trabajo contamos con el apoyo, que agradecemos profundamente, de las autoridades del Departamento de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional, consistente en la asignación de algunas horas semanales en la planificación de nuestras labores académicas, para la elaboración del libro.

Germán Rojas y Sintya Serrano
Quito, agosto de 2017

1 Límites

1.1 Aproximación a la definición de límite

Definición 1: Aproximar

Aproximar es una palabra clave en la ciencia moderna, por sus grandes aplicaciones en la tecnología. Para un primer acercamiento al cálculo vamos a *aproximar* valores tal como π, $\sqrt{2}$ o $\frac{5}{6}$ con números decimales que aproximen su valor. Un ejemplo de la importancia de la aproximación de números tal como π es la computación, para representar un número existen un número finito de "espacios" de memoria en el computador para π, por lo cual se debe aproximar π para poder representarlo computacionalmente.

Definición 2: Error absoluto

El error absoluto mide la distancia entre el valor real $\overline{x}$ y su aproximación x de la siguiente forma:

$$|\overline{x} - x|,$$

este valor nos dice la *proximidad* entre $\overline{x}$ y x.

Definición 3: Aproximación a la definición de límite

La recta tangente a una curva g en un punto $(a, g(a))$, la podemos aproximar con una recta secante a la curva en el punto $(a, g(a))$ y un punto $(x, g(x))$ distinto de a pero cercano este (de modo que su error absoluto sea muy pequeño), es decir la pendiente de la recta secante está muy próxima a la pendiente de la recta tangente. Tenemos que la pendiente de la recta tangente al punto a es:

$$m_x = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Ejercicios

1. Para cada función definida a continuación, elabore una tabla para los valores $f(x_i)$ con $x_i = a \pm 10^{-i}$ para $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$. ¿Tiene $f(x)$ un "límite" cuando x se aproxima a a?.

   a)

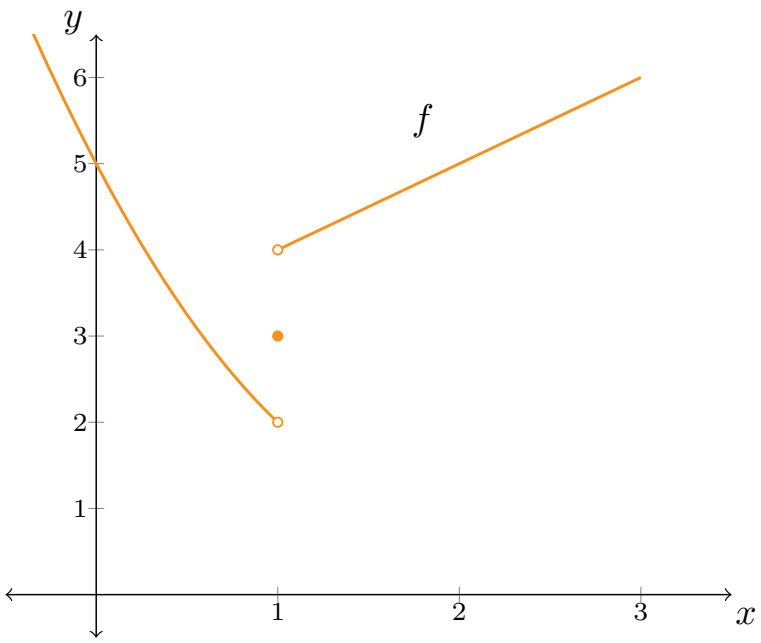
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si} \quad x < 1, \\ 3 & \text{si} \quad x = 1, \\ x + 3 & \text{si} \quad x > 1, \end{cases} \quad a = 1.$$

Solución. Los valores en la siguiente tabla han sido aproximados con cinco cifras decimales.

Figura 1.1: Gráfico de la función f de ecuación:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si} \quad x < 1, \\ 3 & \text{si} \quad x = 1, \\ x + 3 & \text{si} \quad x > 1, \end{cases}$$

alrededor del punto 1.



i	x_i	$f(x_i)$
1	1.1	4.1
2	1.01	4.01
3	1.001	4.001
4	1.0001	4.0001
5	1.000 01	4.000 01
−5	0.999 99	2.000 02
−4	0.9999	2.0002
−3	0.999	2.002
−2	0.99	2.02
−1	0.9	2.2

Tabla 1.1: Valores $f(x_i)$ con $x_i = a \pm 10^{-i}$ e $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$.

En la gráfica y tabla notamos que cuando x_i se acerca a 1 por la derecha la función se aproxima a 4, mientras que si x_i se acerca a 1 por la izquierda la función se acerca a 2 y no se toma el valor de $f(1)$ en el análisis.

Al analizar los valores presentados en la tabla se nota que cuando x_i se aproxima al valor de 1, $f(x_i)$ toman valores cercanos tanto a 4 como a 2. Por lo que podemos concluir que la función f no posee límite en 1.

b)

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right), \; a = 0.$$

Solución. Los valores en la siguiente tabla han sido aproximados con cinco cifras decimales.

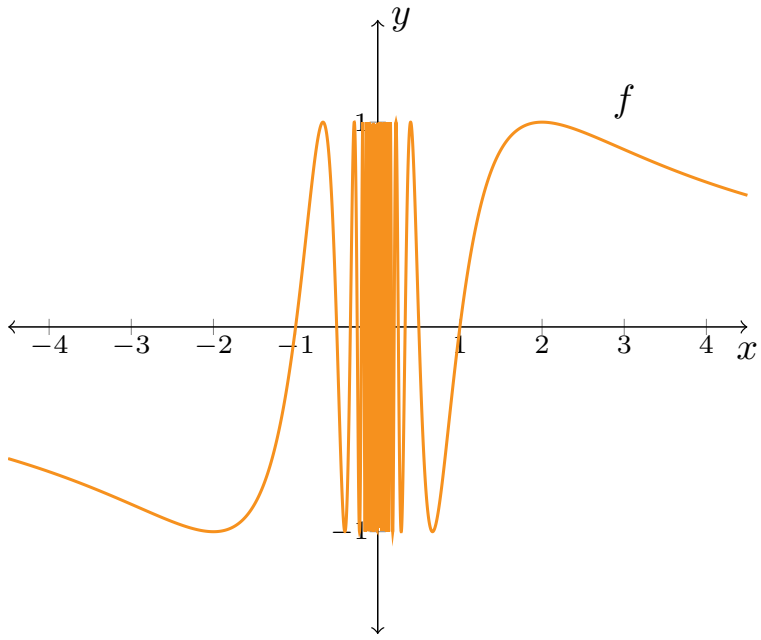


Figura 1.2: Gráfico de la función f de ecuación $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$ alrededor del punto 0.

i	x_i	$f(x_i)$
1	0.1	0.309 92
2	0.01	0.031 41
3	0.001	0.003 14
4	0.0001	0.000 31
5	0.000 01	0.000 03
−5	−0.000 01	−0.000 04
−4	−0.0001	−0.000 31
−3	−0.001	−0.003 14
−2	−0.01	−0.031 41
−1	−0.1	−0.309 02

Tabla 1.2: Valores de $f(x_i)$ con $x_i = a \pm 10^{-i}$ e $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$.

Al analizar los valores presentados en la tabla se puede observar que que cuando x_i se aproxima al valor de 0, $f(x_i)$ toma los valores aproximados a 0. Lo que nos lleva a la conclusión que $f(x)$ posiblemente tiene límite 0 cuando x se aproxima a 0.

En este ejemplo se muestra la necesidad de una definición formal de límite de una función ya que aunque los valores de $f(x_i)$ en la tabla son cercanos a cero, gráficamente podemos ver que la función oscila entre -1 y 1 cuando se acerca a cero.

Sin embargo, en la gráfica de la función f se puede notar que cuando la función se aproxima al valor $x = 0$, la función oscila entre -1 y 1, por esto no existe límite.

Ejercicios Propuestos

1. Para cada función definida a continuación, elabore una tabla para los valores $f(x_i)$ con $x_i = a \pm 10^{-i}$ para $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$. ¿Tiene $f(x)$ un "límite" cuando x se aproxima a a?.

   a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 5x + 6}$, $a = 2$.

   b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 5x + 6}$, $a = 3$.

   c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$, $a = 0$.

   d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(x)}$, $a = 0$.

   e) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si} \quad x < 1, \\ x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1, \end{cases}$ $a = 1$.

1.2 Límites

En esta sección, a diferencia de la anterior, comenzaremos con la definición de límite y la aplicaremos en algunas funciones. Luego enunciaremos el Teorema de límite de funciones localmente iguales y lo aplicaremos en algunos ejercicios.

Definición 4: Límite

Sean:

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo abierto que contiene al número a; y
3. f una función real definida en I, salvo, tal vez, en a; es decir, $I \subset \text{Dom}(f) \bigcup \{a\}$.

Se dice que L *es el límite de* f *cuando* x *tiende a* a, y se escribe

$$L = \lim_{x \to a} f(x),$$

si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - a| < \delta,$$

entonces:

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Simbólicamente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\right].$$

Definición 5: Funciones localmente iguales

Sean:
a un número real;
I un intervalo abierto que contiene a a; y
f y g dos funciones reales definidas en I, salvo tal vez en a.
Diremos que "$f = g$ localmente cerca de a", o "$f = g$ cerca de a", si existe $r > 0$ tal que para todo $x \in]a - r, a + r[\setminus \{a\}$, $f(x) = g(x)$.

Teorema 1: Límite de funciones localmente iguales

Sean:
a un número real;
I un intervalo abierto que contiene al número a;
f y g dos funciones definidas en I, salvo tal vez en a.
Si $f = g$ cerca de a, entonces:

1. Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ si y solo si existe $\lim_{x \to a} g(x)$.
2. Si los límites existen, son iguales.

Ejercicios

1. Demuestre, usando la definición de límite, que:

   a) $\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$

   Demostración. Sea $f(x)=3x-1$, $a=2$ y $L=5$. Tenemos que probar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0<|x-2|<\delta$ entonces

   $$|f(x)-5|<\epsilon. \tag{1.1}$$

   Sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-2| < \delta$ entonces $|f(x)-5|<\epsilon$.
   Búsqueda de δ:
   Sea $x \in \mathbb{R}$, tal que $0<|x-2|<\delta$ con δ por determinar.
   Tomamos,

   $$\begin{aligned}|f(x)-5| &= |(3x-1)-5|\\ &= |3x-6|\\ &= 3|x-2|.\end{aligned}$$

   Para lograr que (1.1), es decir para que

   $$3|x-2|<\epsilon,$$

   basta exigir que $|x-2|<\dfrac{\epsilon}{3}$. Como ello se debe obtener de la desigualdad $|x-2|<\delta$ basta tomar $\delta \leq \dfrac{\epsilon}{3}$.
   Probemos que el valor de δ encontrado es adecuado. Supongamos que $0<|x-2|\leq\delta\leq\dfrac{\epsilon}{3}$ y probemos que (1.1) se cumple.

   $$|f(x)-5|=3|x-2|<3\frac{\epsilon}{3}=\epsilon,$$

   dado que $0<|x-2|<\delta\leq\dfrac{\epsilon}{3}$. Así queda probada la ecuación (1.1) concluyendo la demostración. □
   Notemos, en el ejercicio anterior se obtuvo $|f(x)-5|=3|x-2|$, lo que facilitó la búsqueda de δ. Esto se reduce al siguiente procedimiento

   $$\begin{aligned}|f(x)-5|=3|x-2|&<\epsilon\\ &\Uparrow\\ |x-2|&<\frac{\epsilon}{3}\\ &\Uparrow\\ |x-2|&<\delta\leq\frac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

   Se nota claramente que deberíamos exigir que $\delta\leq\dfrac{\epsilon}{3}$. Este razonamiento es válido cuando obtenemos que

   $$|f(x)-l|\leq M|x-a|,$$

En las demostraciones de existencia de límite vamos a aplicar un método sistemático que nos permita demostrar la existencia del límite dado.
Procedimiento de demostración:

- Definir los datos necesarios para aplicar la definición de límite $f(x)$, a y L.
- Fijamos ϵ arbitrario (es decir ϵ es un valor real mayor que cero pero no tiene un valor específico).
- Búsqueda de δ, que no es parte de la demostración pero es importante para poder justificar el proceso de la misma.
- Conclusión donde se muestra que el δ escogido es correcto para nuestro ϵ.

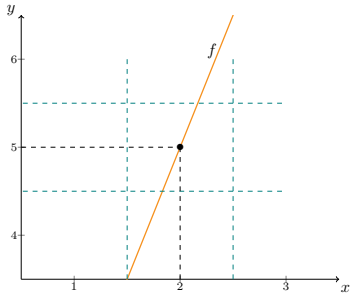


Figura 1.3: Función f definida como $f(x)=3x-1$ cerca de $a=2$

Los símbolos $\Uparrow$ y $\Downarrow$ en las demostraciones significan "dado que" por facilidad de escritura.
Por ejemplo:

$$\begin{aligned}A &< B\\ &\Uparrow\\ c &= 0\end{aligned}$$

se lee: A es menor que B "dado que" o "debido a que" $c=0$.

donde M es una constante y $M > 0$, podemos tomar δ como $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$ con el razonamiento siguiente,

$$\begin{aligned} |f(x) - l| \leq M|x - a| &< \epsilon \\ &\Uparrow \\ |x - a| &< \frac{\epsilon}{M} \\ &\Uparrow \\ |x - a| < \delta \leq \frac{\epsilon}{M}&. \end{aligned}$$

Lo que muestra que $\delta \leq \dfrac{\epsilon}{M}$ es un δ adecuado para la demostración de límite.

Es importante mencionar que $\delta > 0$ no depende del valor de x.

¿Qué pasa si en lugar de la constante M, se tiene una expresión $g(x)$ que depende de x?. En este caso obtendríamos una expresión de la forma

$$|f(x) - l| = |g(x)| \cdot |x - a|.$$

La acotación de $g(x)$ es necesaria en puntos cerca de a.

En este caso es necesario hallar previamente una cota superior de $|g(x)|$ para valores de x cercanos a a. Debemos hallar $r > 0$ y $M > 0$ tales que si $0 < |x - a| < r$ entonces $g(x) \leq M$. Lo que implica que si tomamos $0 < |x - a| < r$, entonces

Los valores lejos de a no se toman en cuenta para la acotación.

$$|f(x) - l| \leq |g(x)| \cdot |x - a| \leq M|x - a|, \tag{1.2}$$

y a partir de (1.2) podemos aplicar el procedimiento descrito anteriormente para continuar con la demostración.

En el siguiente ejercicio ilustraremos el procedimiento.

b) $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = 3$

Solución. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 + x + 1.$$

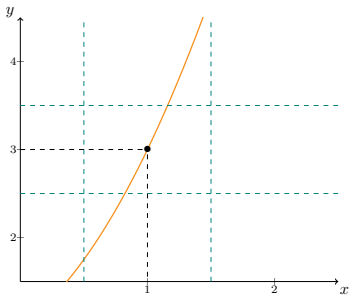


Figura 1.4: Función f definida como $f(x) = x^2 + x + 1$ cerca de $a = 1$.

Sea $\epsilon > 0$. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - 3| < \epsilon,$$

siempre que,

$$0 < |x - 1| < \delta.$$

Búsqueda de δ:

Sea $x \in \mathbb{R}$, tal que $0 < |x - 1| < \delta$, con $\delta > 0$ por determinar.

Comenzamos tomando:

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| &= |(x^2 + x + 1) - 3| \\ &= |x^2 + x - 2| \\ &= |(x + 2)(x - 1)| \\ &= |x + 2| \cdot |x - 1|. \end{aligned}$$

Si definimos $g(x) = x + 2$, obtenemos

$$|f(x) - 3| < |g(x)| \cdot |x - 1|. \tag{1.3}$$

Ahora buscamos una cota superior para $|g(x)|$, teniendo en cuenta que x es un valor cercano a 1. Para que x sea cercano a 1 restringimos los valores de δ a un número real $r > 0$, en este caso tomaremos $r = 1$. Así como,

$$|x - 1| < \delta \leq 1,$$

podemos decir que:

$$|x - 1| < 1,$$

por lo que,

$$-1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2,$$

lo que es equivalente a escribir,

$$2 < x + 2 < 4,$$

así

$$|x + 2| < 4 \Rightarrow |g(x)| < 4.$$

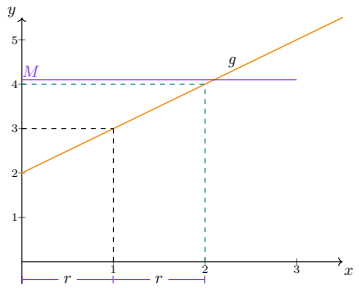


Figura 1.5: Acotación de la función $|g|$ donde $g(x) = x + 2$.
Note en la gráfica de la función $|g|$ que $|g|$ es creciente para x por lo que acotar toda la función no es viable así que escogimos $r = 1$ que será el radio del intervalo centrado en $a = 1$. Para dicho intervalo se halla una cota de g que será un $M \geq 4$.

Con este resultado de acotación, la desigualdad (1.3) se puede expresar de la siguiente manera:

$$|f(x) - 3| < |g(x)| \cdot |x - 1| < 4 \cdot |x - 1|.$$

Para lograr que la última expresión sea menor que ϵ fijado, basta exigir que,

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{1.4}$$

A su vez, para que (1.4) se cumpla, será suficiente exigir que $\delta \leq \frac{\epsilon}{4}$. Esquemáticamente resumimos estos razonamientos de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| = |x + 2||x - 1| = |g(x)||x - 1| < 4|x - 1| < \epsilon \\ \Uparrow \\ |x - 1| < \frac{\epsilon}{4} \\ \Uparrow \\ |x - 1| < \delta \leq \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

Es decir que para lograr $|f(x) - 3| < \epsilon$, con la condición de que $0 < |x - 1| < \delta$, basta que $\delta \leq 1$ y a la vez $\delta \leq \frac{\epsilon}{4}$. Entonces tomamos,

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{4}\right\}, \tag{1.5}$$

lo que nos garantiza que se cumplan las dos últimas desigualdades, por lo que hemos concluido la búsqueda de δ.
Nos queda probar que con δ definida en (1.5) se cumple que:

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon,$$

para lo que suponemos que $0 < |x-1| < \delta$ y probaremos que $|f(x)-3| < \epsilon$. Partimos de,

$$\begin{aligned} |f(x)-3| = |g(x)| \cdot |x-1| &< 4|x-1|, && \text{porque } 0 < |x-1| < \delta \leq 1; \\ &< 4\frac{\epsilon}{4}, && \text{porque } |x-1| < \delta \leq \frac{\epsilon}{4}; \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Es decir que $|f(x)-3| < \epsilon$, lo que concluye la demostración.

c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x+4}{x-1} = -\dfrac{3}{2}$

Demostración. En este caso tenemos

$$f(x) = \frac{x+4}{x-1}.$$

Para comenzar con la demostración de la existencia del límite dado, tenemos:

Sea $\epsilon > 0$, debemos hallar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x+1| < \delta$ entonces,

$$\left| f(x) + \frac{3}{2} \right| < \epsilon.$$

Búsqueda de δ:

Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x+1| < \delta$, con $\delta > 0$ por determinar.

Tomamos entonces,

$$\left| f(x) + \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{x+4}{x-1} + \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{5}{2(x-1)} \right| \cdot |x+1|.$$

De la expresión anterior tomamos $g(x) = \dfrac{5}{2(x-1)}$, y se obtiene que:

$$\left| f(x) + \frac{3}{2} \right| = |g(x)| \cdot |x+1|.$$

Ahora, buscamos una cota superior de $|g(x)|$ para valores de x cercanos a -1.

Lo primero que se observa en la función $g(x)$ es que su denominador se anula en 1 y como la distancia entre 1 y -1 (valor de a) es 2, nos interesa tomar valores que sean menores a 2 para que la función $g(x)$ exista, por lo que conviene tomar $|x+1| < r$ con $r < 2$. Para este ejercicio y por facilidad en las operaciones tomaremos $r = 1$.

Entonces trabajaremos con $x \in \mathbb{R}$ tal que,

$$0 < |x+1| < 1.$$

Y procedemos a hallar una cota para $|g(x)|$. Tenemos que

$$|x+1| < 1 \Rightarrow -1 < x+1 < 1 \Rightarrow -2 < x < 0.$$

Resumimos los razonamientos realizados en el siguiente procedimiento:

- Tomamos $\delta \leq r$ para restringir los valores de x posibles, por lo que $0 < |x-a| < \delta \leq r$ y podemos asegurar que $0 < |x-a| < r$ con lo que,
$$|f(x)-l| \leq M|x-a|. \qquad (1.6)$$
- A la vez tenemos que $\delta < \dfrac{\epsilon}{M}$ por lo que de la expresión (1.6) se tiene que,
$$|f(x)-l| \leq M|x-a| < \epsilon.$$
- Vemos que la desigualdad $|f(x)-l| < \epsilon$ se obtiene a partir de la premisa $0 < |x-a| < \delta$, si al mismo tiempo δ cumple con las desigualdades:
$$\delta \leq r \text{ y } \delta \leq \frac{\epsilon}{M}.$$
por lo que el valor de delta que debemos tomar es:
$$\delta = \text{mín}\left\{ r, \frac{\epsilon}{M} \right\}.$$

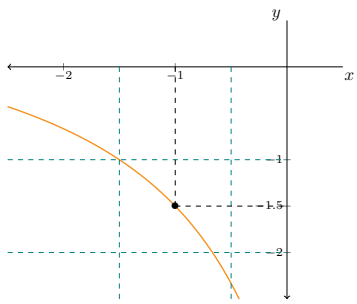


Figura 1.6: Función f de ecuación $f(x) = \frac{x+4}{x-1}$ cerca del punto $a = -1$.

Como sabemos que $-2 < x < 0$ podemos reconstruir $|g(x)|$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -2 < x < 0 &\Rightarrow -3 < x-1 < -1 \\ &\Rightarrow 1 < |x-1| < 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{|x-1|} < 1 \\ &\Rightarrow \frac{5}{2|x-1|} < \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow |g(x)| < \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Como $|g(x)| < \frac{5}{2}$ encontramos una cota para $|g(x)|$, por lo que

$$|g(x)| \cdot |x+1| < \frac{5}{2}|x+1|.$$

En resumen tenemos:

$$\begin{array}{rcccl} |x+1| < & \delta & \leq 1 & & \\ & \Downarrow & & & \\ |x+1| & < & 1 & & \\ & \Downarrow & & & \\ \left|f(x)+\frac{3}{2}\right| = |g(x)| \cdot |x+1| & < & \frac{5}{2}|x+1| & < & \epsilon \\ & & & \Uparrow & \\ & & |x+1| & < & \frac{2}{5}\epsilon \\ & & & \Uparrow & \\ & & |x+1| & < & \delta \leq \frac{2}{5}\epsilon. \end{array}$$

Vemos que la desigualdad $\left|f(x)+\frac{3}{2}\right| < \epsilon$ se obtiene a partir de la condición $0 < |x+1| < \delta$ si se cumplen simultáneamente las desigualdades,

$$\delta \leq 1 \text{ y } \delta \leq \frac{2}{5}\epsilon.$$

Por lo que basta tomar,

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{2}{5}\epsilon\right\}.$$

En efecto, probemos que el δ escogido cumple que:
Si $0 < |x+1| < \delta$ entonces $\left|f(x)+\frac{3}{2}\right| < \epsilon$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} \left|f(x)+\frac{3}{2}\right| &= |g(x)| \cdot |x+1|, \quad \text{con} \quad g(x) = \frac{5}{2(x+1)}; \\ &< \frac{5}{2}|x+1|, \quad \text{porque} \quad |x+1| < \delta \leq 1; \\ &< \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\epsilon, \quad \text{porque} \quad |x+1| < \delta \leq \tfrac{2}{5}\epsilon; \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

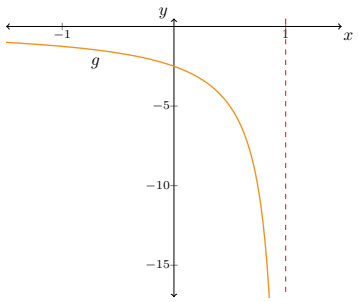


Figura 1.7: Función g definida por $g(x) = \frac{5}{2(x-1)}$.

En este caso podemos tomar valores de r estrictamente menores que 2 por ejemplo podemos tomar $r = 0.1, 0.5, 1, 1.5$, etc, que son reales menores que 2, y no es posible tomar valores como $r = 3$ porque g no está definida en todo punto en el intervalo de centro -1 con radio 3.

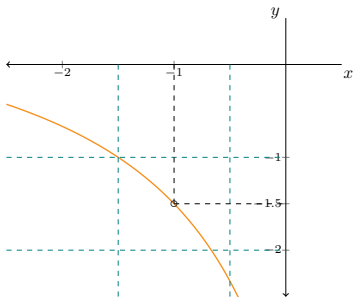


Figura 1.8: Función f definida como $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-1}$ cerca al punto $a=-1$.

2. Use el teorema límite de funciones localmente iguales para hallar el siguiente límite

   a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2-1}$

   Demostración. Aplicando el teorema de funciones localmente iguales con $f(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-1}$, $a=-1$ e $I=]-3,1[$. Evidentemente f está definida en $I\setminus\{-1\}$, y debemos hallar g definida en $I\setminus\{-1\}$, que sea igual a f cerca de -1, y que conozcamos $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.
   Comenzamos manipulando la función f para hallar g de la siguiente forma:

   $$f(x)=\frac{x^2+5x+4}{x^2-1}=\frac{(x+4)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+4}{x-1}, \text{ si } x\neq -1,$$

   si tomamos $g(x)=\dfrac{x+4}{x-1}$, tenemos que $f=g$ cerca de -1, puesto que $f(x)=g(x)$ para todo $x\in I\setminus\{-1\}$. Por otra parte, en el ejemplo anterior demostramos que:

   $$\lim_{x\to -1} g(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x+4}{x-1}=-\frac{3}{2},$$

   por lo que podemos concluir que:
   Existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ y

   $$\lim_{x\to -1} f(x)=-\frac{3}{2}.$$

   □

Ejercicios Propuestos

1. Demuestre, usando la definición de límite, que:

   a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+1\right)=2$

   b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-(1/x)}{x-1}=1$

   c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-1}{x^2+x}=\dfrac{4}{3}$

2. Use el teorema límite de funciones localmente iguales para hallar los siguientes límites,

   a) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$

   b) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^3-8}{t-2}$

1.3 Continuidad e interpretación geométrica del límite

Definición 6: Definición de función continua en un punto

Una función real $f: A \to \mathbb{R}$, donde $I \subseteq A$ es un intervalo abierto, es *continua* en a si y solo si:

1. $a \in I$;
2. existe $\lim_{x \to a} f(x)$; y
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Una función es *continua en el intervalo abierto* I si y solo si es continua en cada uno de los elementos de I.

Teorema 2: Función continua

Sean I un intervalo abierto, $f: I \to \mathbb{R}$ y $a \in I$. Entonces f es continua en a si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que,

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon,$$

siempre que $|x - a| < \delta$ y $x \in I$.

Ejercicios

1. Sean $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$

   - Encuentre un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, siempre que $0 < |x - a| < \delta$; y
   - Construya una caja de $f(x)$ centrada en (a, L) y de altura 2ϵ que ilustre el resultado encontrado en el punto anterior para cada f, a, L y ϵ dados a continuación:

   a) $f(x) = 4x - 3$; $a = 1$; $L = 1$; $\epsilon = 0.6$.

   Dado cualquier número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x)$ se encuentre en el intervalo de centro L y radio ϵ, siempre que x se encuentre en el intervalo de centro a y radio δ y $x \neq a$.

   Demostración. Mediante la definición de límite vamos a encontrar δ requerido para este problema.
   Sea $\epsilon > 0$ debemos hallar $\delta > 0$ tal que $0 < |x - 1| < \delta$.
   Búsqueda de δ:
   Dado $x \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned} |f(x) - L| = |(4x - 3) - 1| = 4|x - 1| &< \epsilon \\ &\Uparrow \\ |x - 1| &< \frac{\epsilon}{4} \\ &\Uparrow \\ |x - 1| < \delta \leq \frac{\epsilon}{4}&. \end{aligned}$$

   Basta tomar $\delta \leq \frac{\epsilon}{4}$.

Entonces para $\epsilon = 0.6$, podemos tomar $\delta = \dfrac{0.6}{4} = 0.15$. Así:

$$\begin{aligned} L + \epsilon &= 1 + 0.6 = 1.6 \\ L + \epsilon &= 1 - 0.6 = 0.4 \\ a + \delta &= 1 + 0.15 = 1.15 \\ a - \delta &= 1 - 0.15 = 0.85. \end{aligned}$$

□

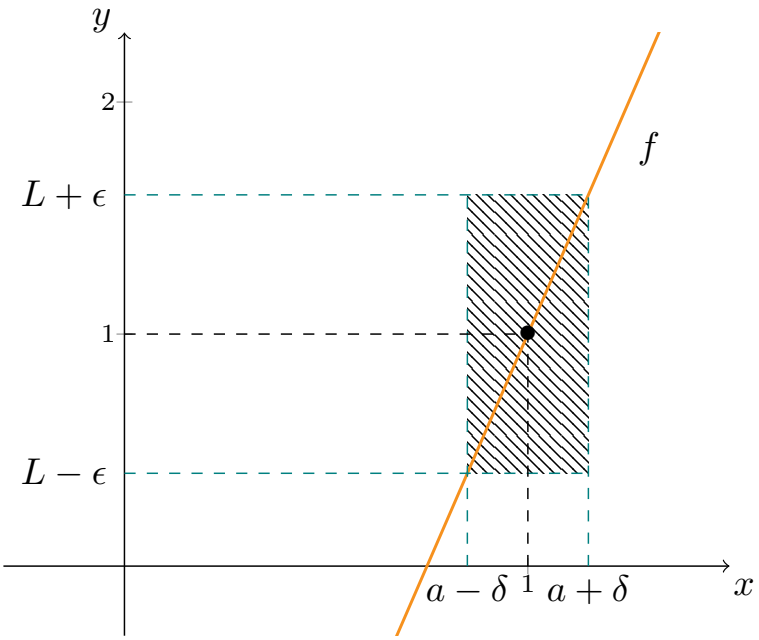


Figura 1.9: Caja de f definida como $f(x) = 4x - 3$ con $a = 1$, $L = 1$ y $\epsilon = 0.6$.

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2}$; $a = 2$; $L = 1$; $\epsilon = 0.4$.

Demostración. En este ejercicio en particular notemos que:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2} = \frac{(2x - 3) \cdot (x - 2)}{x - 2} = 2x - 3, \text{ si } x \neq 2.$$

Y al igual que en el ejercicio anterior partiremos de la definición de límite:
Sea $\epsilon > 0$ debemos hallar $\delta > 0$ tal que $0 < |x - 2| < \delta$, con $\delta > 0$ por determinar.
Búsqueda de δ:

$$|f(x) - L| = |(2x - 3) - 1| = 2|x - 2|,$$

es decir que si $0 < |x-2|$ sabemos que:

$$\begin{aligned} |f(x) - L| = |(2x-3)-1| = 2|x-2| &< \epsilon \\ \Uparrow & \\ |x-2| &< \frac{\epsilon}{2} \\ \Uparrow & \\ |x-1| < \delta \leq \frac{\epsilon}{2}. & \end{aligned}$$

Basta entonces tomar $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Para $\epsilon = 0.4$, tomamos $\delta = 0.2$. De lo que:

$$\begin{aligned} L + \epsilon &= 1 + 0.4 = 1.4 \\ L - \epsilon &= 1 - 0.4 = 0.6 \\ a + \delta &= 2 + 0.2 = 2.2 \\ a - \delta &= 2 - 0.2 = 1.8. \end{aligned}$$

□

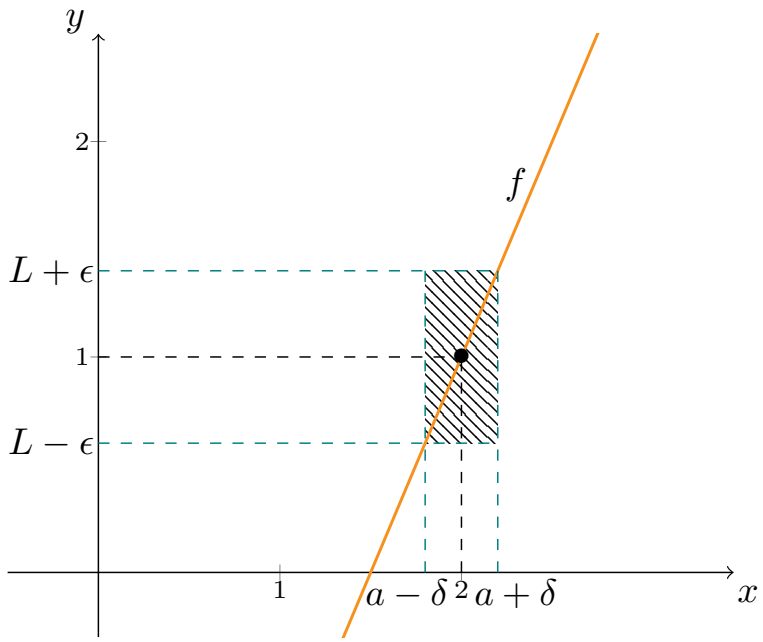


Figura 1.10: Caja de f definida como $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2}$ con $a = 2$, $L = 1$ y $\epsilon = 0.4$.

c) $f(x) = x^2 + x + 1$, $a = 1$, $L = 3$, $\epsilon = 2$. En un ejercicio de la sección previa mostramos que:

$$\lim_{x \to 1} \left(x^2 + x + 1 \right) = 3,$$

existe y además sabemos que para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ donde,

$$\delta = \text{mín} \left\{ 1, \frac{\epsilon}{4} \right\},$$

nos garantiza la definición de límite. Dado que $\epsilon = 2$ en este ejercicio tenemos que,

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{2}{4}\right\} = \frac{1}{2}.$$

De lo que:

$$\begin{aligned} L+\epsilon &= 3+2 = 5 \\ L-\epsilon &= 3-2 = 1 \\ a+\delta &= 1+0.5 = 1.5 \\ a-\delta &= 1-0.5 = 0.5. \end{aligned}$$

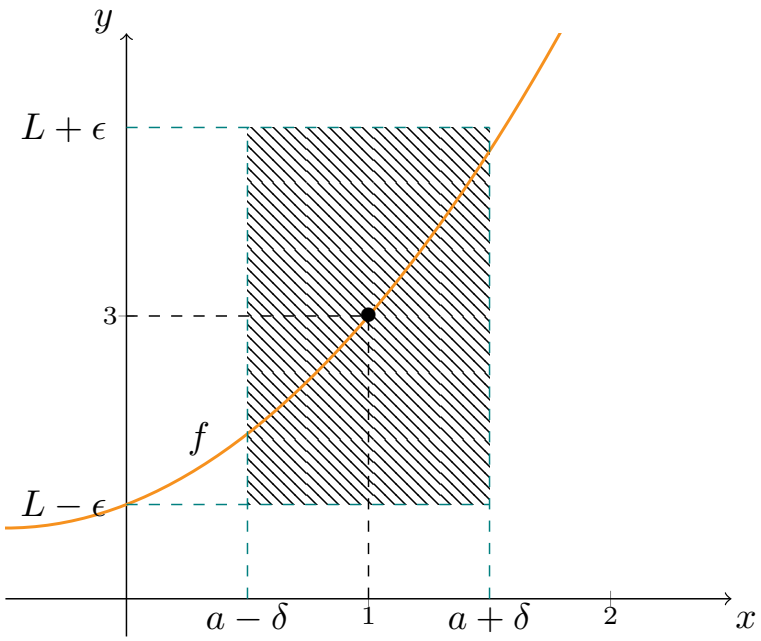


Figura 1.11: Caja de f definida como $f(x) = x^2 + x + 1$ con $a = 1$, $L = 3$ y $\epsilon = 2$.

2. Demuestre,

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{8x^2 + 10x + 3}{2x + 1} = 1,$$

utilizando la definición de límite.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar $\delta > 0$ tal que $0 < \left|x + \frac{1}{2}\right| < \delta$ entonces $|f(x) - 1| < \epsilon$.

Búsqueda de δ:

Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \left|x + \frac{1}{2}\right| < \delta$, con $\delta > 0$ por determinar.

Notemos que la función f puede ser simplificada antes de aplicar la definición de límite,

$$f(x) = \frac{8x^2 + 10x + 3}{x - 2} = \frac{(4x+3)(2x+1)}{2x+1} = 4x + 3, \text{ puesto que } 2x + 1 \neq 0.$$

teniendo en cuenta que $x \neq -\frac{1}{2}$.

$$|f(x)-1| = |(4x+3)-1| = 2|x-\frac{1}{2}| < \epsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|x-\frac{1}{2}| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\Uparrow$$
$$|x-\frac{1}{2}| < \delta \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Basta tomar, $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Probemos que $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ cumple con la definición requerida, es decir que si $\left|x+\frac{1}{2}\right| < \delta$ entonces $|f(x)-1| < \epsilon$.
Así:

$$|f(x)-1| = 2\left|x-\frac{1}{2}\right| < 2\frac{\epsilon}{2} \quad \text{porque } 0 < |x-1| < \delta = \frac{\epsilon}{2};$$
$$= \epsilon.$$

Lo que concluye la demostración. □

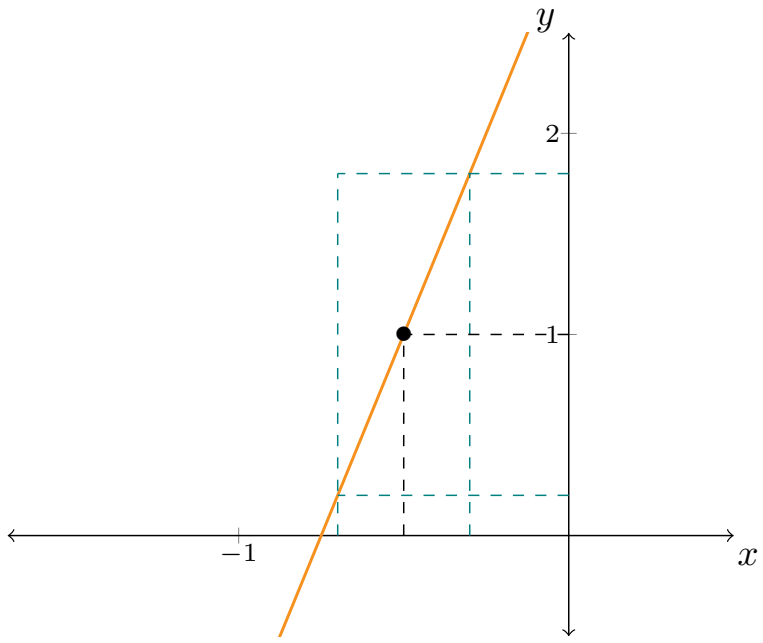


Figura 1.12: Función f con ecuación $f(x) = \frac{8x^2+10x+3}{2x+1}$ cerca del punto $a = -\frac{1}{2}$.

Ejercicios Propuestos

1. Sean $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$

   - Encuentre un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, siempre que $0 < |x - a| < \delta$; y
   - Construya una caja de $f(x)$ centrada en (a, L) y de altura 2ϵ que ilustre el resultado encontrado en el punto anterior para cada f, a, L y ϵ dados a continuación:

   a) $\lim_{x\to 1}(x^2 + 1)$; $a = 1$, $L = 1$, $\epsilon = 0.4$.

   b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x}{x^2+1}$; $a = -\frac{1}{2}$, $L = 2$, $\epsilon = 0.5$.

   c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x}$; $a = \frac{4}{3}$, $L = 1$, $\epsilon = 0.2$.

2. Demuestre que,

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 5x - 14} = -\frac{2}{9},$$

   utilizando la definición de límite.

1.4 Propiedades de límites

Teorema 3: Propiedades algebraicas de los límites

Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces:

1. *Límite de la suma*: existe el límite de $f(x)+g(x)$ y

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

2. *Límite del producto*: existe el límite de $f(x)\cdot g(x)$ y

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

3. *Límite del inverso multiplicativo*: si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, existe el límite de $\dfrac{1}{g(x)}$ y

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Corolario 1:

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces:

1. *Límite del producto de un escalar por una función*: existe el límite de $\alpha f(x)$ y

$$\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x).$$

2. *Límite de la resta*: existe el límite de $f(x)-g(x)$ y

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x).$$

3. *Límite de una combinación lineal*: existe el límite de $\alpha f(x)+\beta g(x)$ y

$$\lim_{x\to a}(\alpha f(x)+\beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x).$$

4. *Límite del cociente*: existe el límite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ siempre que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ y

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Proposición 1: Propiedades algebraicas de la continuidad

Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$ son continuas en a. Entonces la *suma* $(f+g)$, la *resta* $(f-g)$, el *producto* $(f\cdot g)$ y el *cociente* (f/g) (siempre que $g(a)\neq 0$) son funciones continuas en a.

Ejercicios

1. En los siguientes ejercicios, calcule el límite dado si él existe. De ser necesario utilice primero una manipulación algebraica.

   a) $\lim_{t\to -1} \dfrac{t^3+1}{t^2-1}$

   Solución.

   $$f(t) := \frac{t^3+1}{t^2-1} = \frac{(t+1)\cdot(t^2-t+1)}{(t+1)\cdot(t-1)} = \frac{t^2-t+1}{t-1} =: g(t).$$
   $$\Uparrow$$
   $$t \neq -1$$

   Vemos que $f = g$ cerca de -1. Por otra parte,

   $$\lim_{t\to -1} g(t) = \lim_{t\to -1} \frac{t^2-t+1}{t-1} = g(-1) = -\frac{3}{2},$$

   porque g es continua en -1 por ser una función racional definida en -1.
   Aplicando el teorema del límite de funciones localmente iguales tendremos que:

   $$\lim_{t\to -1} f(t) = \lim_{t\to -1} g(t) = -\frac{3}{2}.$$

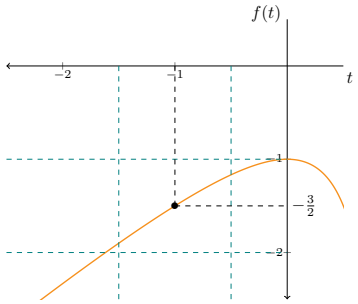


Figura 1.13: Función f con ecuación $f(t) = \dfrac{t^3+1}{t^2-1}$ cerca del punto $a = -1$.

   b) $\lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left((x+h)^3 - x^3\right)$, para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario.

   Solución. Sea $x \in \mathbb{R}$

   $$\begin{aligned} f(h) := \frac{(x-h)^3 - x^3}{h} &= \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ &= \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} \\ &= 3x^2+3xh+h^2 =: g(h). \end{aligned}$$
   $$\Uparrow$$
   $$h \neq 0$$

   Vemos que $f = g$ cerca de 0. Por otra parte, como g es un polinomio, g es continua, por lo que,

   $$\lim_{h\to 0} g(h) = g(0) = 3x^2.$$

   Aplicando el teorema de límite de funciones localmente iguales tenemos que:

   $$\lim_{h\to 0} f(h) = \lim_{h\to 0} g(h) = 3x^2.$$

2. Calcule el límite

   $$\lim_{x\to 0} \frac{3x-7}{7x^2+8},$$

   usando las propiedades de los límites e indique qué propiedades usó.

Solución. Tomando $f(x) = 3x - 7$ y $g(x) = 7x^2 + 8$, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x-7}{7x^2+8} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

para aplicar la propiedad algebraica del límite de un cociente, debemos mostrar que $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$.

$$\lim_{x\to 0}(7x^2+8) = \lim_{x\to 0} 7x^2 + \lim_{x\to 0} 8 = 8,$$

por propiedades algebraicas de límite de la suma y multiplicación sabemos que $\lim_{x\to 0} g(x) = 8$, por lo que podemos aplicar el límite del cociente de dos funciones. Como

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 3x - \lim_{x\to 0} 7 = -7,$$

y,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{3x-7}{7x^2+8} &= \frac{\lim_{x\to 0} 3x-7}{\lim_{x\to 0} 7x^2+8} \\ &= -\frac{7}{8}.\end{aligned}$$

debido a propiedades de la suma y multiplicación de límites.

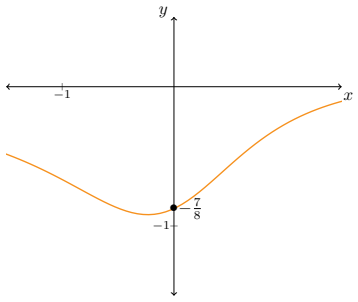


Figura 1.14: Ecuación $y = \dfrac{3x-7}{7x^2+8}$, cerca del punto $a = 0$.

Ejercicios Propuestos

1. En los siguientes ejercicios, calcule el límite dado si él existe e indique qué propiedades uso. De ser necesario utilice primero una manipulación algebraica.

   a) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}$, $a \neq 0$

   b) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(t+h)^2-t^2}{h}$

   c) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4}$

   d) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2+10x+25}$

   e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}-6/x}{3/x+\sqrt{x}}$

1.5 Generalizaciones de las propiedades de límite

Corolario 2: Generalización de las propiedades algebraicas

Sean $n \in \mathbb{N}$, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ tales que existe el límite $\lim_{x\to a} f_i(x)$ para todo i tal que $1 \leq i \leq n$. Entonces:

1. $\lim_{x\to a} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x\to a} f_i(x)$.
2. $\lim_{x\to a} \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{x\to a} f_i(x)$.
3. Si f_i es continua en a para todo i tal que $1 \leq i \leq n$, entonces $\sum_{i=1}^{n} f_i$ y $\prod_{i=1}^{n} f_i$ son continuas en a.

Teorema 4: Límite de un polinomio y una función racional

Si P y Q son dos polinomios, entonces:

1. $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$.
2. $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ siempre que $Q(a) \neq 0$.

De aquí se tiene que todo polinomio es una función continua en $\mathbb{R}$ y toda función racional es continua en $\mathbb{R}$ excepto en aquellos números en los que el denominador es igual a cero.

1.5.1 Ejercicios

1. Si los límites existen, calcularlos

   a) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ con $x > 0$

   Solución.

$$
\begin{aligned}
f(h) := \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} =: g(h). \\
&\Uparrow \\
&h \neq 0.
\end{aligned}
$$

   Vemos que $f = g$ cerca de 0. Usando las propiedades algebraicas de los límites y la continuidad de la función raíz cuadrada

en $]0,+\infty[$, obtenemos que $\lim_{h\to 0} g(h) = g(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, y aplicando el teorema del límite de funciones localmente iguales nos permite concluir que:

$$\lim_{h\to 0} f(h) = \lim_{h\to 0} g(h) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3-3x+2}}{\sqrt[3]{1-2x+x^4}}$

Solución. Como

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2);$$

y,

$$1 - 2x + x^4 = (x-1)(x^3+x^2+x-1),$$

tenemos que,

$$\begin{aligned} f(x) := \frac{\sqrt[4]{x^3-3x+2}}{\sqrt[3]{1-2x+x^4}} &= \frac{|x-1|^{1/2}}{(x-1)^{1/3}} \cdot \frac{(x+2)^{1/4}}{(x^3+x^2+x-1)^{1/3}} \\ &= g(x)\cdot h(x), \end{aligned}$$

si tomamos,

$$g(x) = \frac{|x-1|^{1/2}}{(x-1)^{1/3}},$$

y

$$h(x) = \frac{(x+2)^{1/4}}{(x^3+x^2+x-1)^{1/3}}.$$

Como $\lim_{x\to 1} |g(x)| = \lim_{x\to 1} |x-1|^{1/6} = 0$, se tiene que $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$. por otra parte, como $\sqrt[4]{\ }$ es continua en $]0,+\infty[$ y $\sqrt[3]{\ }$ es continua en $\mathbb{R}$, sus composiciones con polinomios son también continuas, por lo que, se aplican las propiedades algebraicas de límites

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} h(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)^{1/4}}{(x^3+x^2+x-1)^{1/3}} \\ &= h(1) \\ &= \frac{3^{1/4}}{2^{1/3}}; \end{aligned}$$

y, finalmente

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) \cdot \lim_{x\to 1} h(x) = 0.$$

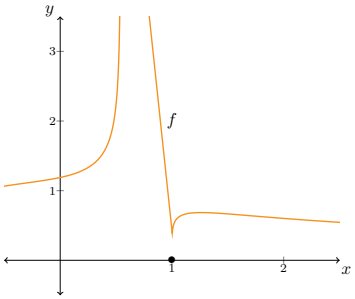


Figura 1.15: Ecuación $y = \dfrac{\sqrt[4]{x^3-3x+2}}{\sqrt[3]{1-2x+x^4}}$ cerca del punto $a = 0$.

Ejercicios Propuestos

Calcular, si existen, los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to y} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$, para $n \in \mathbb{N}$
2. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1 + 2x}{1 + 4x^2 + 5x^4} \right)^4$
3. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x + 1}}$
4. $\dfrac{\sqrt[3]{x2 - 8x + 15}}{\sqrt{x^2 + 10x + 25}}$

1.6 Continuidad de funciones localmente iguales y teorema de cambio de variable

Teorema 5: Continuidad de funciones localmente iguales

Sean: a un número real;
I un intervalo abierto que contiene al número a;
f y g dos funciones definidas en I.
Si $f(a) = g(a)$ y si $f = g$ cerca de a, entonces f es continua en a y si y solo si g es continua en a.

Teorema 6: Continuidad de funciones localmente iguales en un intervalo abierto

Sean I un intervalo abierto; y, f y g dos funciones reales que son iguales en I. Entonces f es continua en I si y solo si g es continua en I.

Teorema 7: Límite de una composición

Si existe el límite $\lim_{x\to a} g(x) = b$ y f es continua en b, entonces existe $\lim_{x\to a} f(g(x))$ y:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b).$$

Teorema 8: Cambio de variable para límites

Sean f y g dos funciones reales. Si:

1. existe $\lim_{x\to a} g(x) =: b$;
2. existe $\lim_{y\to b} f(y) =: L$; y
3. se satisface una de las tres siguientes condiciones:
   a) La función f es continua en b.
   b) La función f no está definida en b.
   c) $f(b) \neq L$ y $g(a) \neq b$ cerca de a.

Entonces:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y) = L.$$

Ejercicios

1. Use el teorema del cambio de variable para calcular

$$\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{x^2-2x+2},$$

justificando su uso.

Demostración. Aplicamos el teorema de cambio de variable con $g(x) = x^2 - 2x + 2$, $a = -1$ y $f(y) = \sqrt[3]{y}$. Ahora verifiquemos si se cumplen las condiciones del teorema de cambio de variable:

- Verifiquemos la existencia de $\lim_{x\to a} g(x)$:

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to -1} (x^2 - 2x + 2) = g(-1) = 5 =: b,$$

porque g es una función continua en $\mathbb{R}$ por ser un polinomio;

- Existencia de $\lim_{y\to b} f(y)$:

$$\lim_{y\to b} f(y) = \lim_{y\to 5} \sqrt[3]{y} = f(5) = \sqrt[3]{5} =: L,$$

dado que f es una función continua en $\mathbb{R}$;

- y por último tenemos que f al ser continua en $\mathbb{R}$, es continua en particular en 5, por lo que se puede aplicar el teorema (8), y tenemos que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{x\to -1} \sqrt[3]{x^2-2x+2} = \sqrt[3]{5}.$$

□

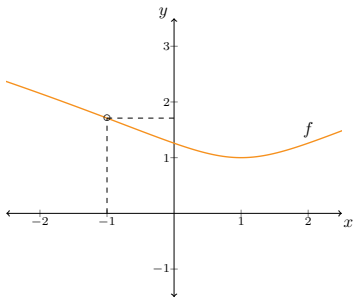


Figura 1.16: Función f de ecuación $f(x) = \sqrt[3]{x^2-2x+2}$ cerca del punto $a = -1$.

2. Supongamos que existen

$$\lim_{y\to b} f(y) = l \text{ y } \lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Pruebe que se puede aplicar el teorema del cambio de variable para calcular $\lim_{x\to a} f(g(x))$, si poniendo $h(x) = g(x) - b$, la función h cambia de signo en a.

Demostración. En este ejercicio se enuncia que se cumplen las dos primeras condiciones del *Teorema de cambio de variable*, por lo que basta verificar que la tercera condición se cumpla. Para probar que la tercera condición se cumpla debemos verificar si uno de sus apartados se cumple; pero no tenemos datos en el ejercicio para poder justificar que f es continua en b o que f en b no está definida. Si una de los dos condiciones se cumpliría el teorema sería aplicable. Supongamos que estos dos apartados no se cumplen.
Si no se cumplen los dos primeros apartados se tendría que f no es continua en b y además existe $f(b)$. Por otro lado, sabemos

que existe $\lim_{x\to b} f(y) =: L$, por lo que se tiene que $f(b) \neq L$ (si no, f sería continua y cumpliría el primer apartado de la tercera condición).
Basta probar que $g(x) \neq b$ cerca de a, para lo cual se conoce que h cambia de signo en a. Esto significa que existe $r > 0$ tal que:

i. $h(x) < 0$ en $]a-r, a[$ y $h(x) > 0$ en $]a, a+r[$; o bien,

ii. $h(x) > 0$ en $]a-r, a[$ y $h(x) < 0$ en $]a, a+r[$.

Esto es lo mismo que $h(x) = g(x) - b \neq 0$ cerca de a, lo que implica que $g(x) \neq b$ cerca de a, por lo tanto podemos aplicar el teorema de cambio de variable. □

3. Si existe, halle el valor del límite dado. Haga uso de las siguientes igualdades

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \text{ y } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0.$$

De ser el caso, realice un cambio de variable adecuado.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{3+\cos(x)}$.

Solución. Para este ejemplo tenemos que:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{3+\cos(x)},$$

vemos fácilmente que f es continua en $\mathbb{R}$ por propiedades algebraicas de la continuidad, puesto que las funciones seno y coseno son continuas al igual que la función constante 3 y además su denominador no se anula debido a que

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x &\leq 1 \\ 2 \leq 3+\cos x &\leq 4, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.
En consecuencia

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{4}.$$

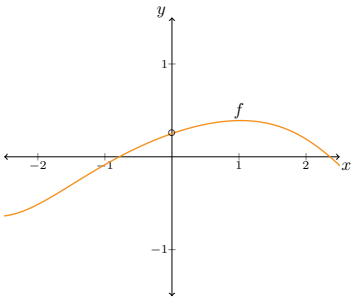


Figura 1.17: Función f de ecuación $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{3+\cos(x)}$ cerca del punto $a = 0$.

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{\operatorname{sen}(x)+\tan(x)}$

Solución.

$$h(x) := \frac{x^2+x}{\operatorname{sen}(x)+\tan(x)} = \frac{x(x+1)}{\operatorname{sen} x\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \cdot \frac{x+1}{1+\frac{1}{\cos x}}.$$

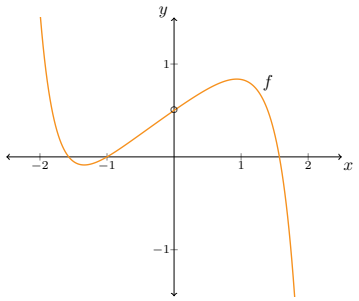


Figura 1.18: Función f definida como $f(x) = \dfrac{x^2+x}{\operatorname{sen}(x)+\tan(x)}$ cerca del punto $a = 0$.

Si definimos $k(x) = \dfrac{x+1}{1+\frac{1}{\cos x}}$, la función k es el cociente de un polinomio y dividido por $1 + \dfrac{1}{\cos(x)}$ que es continua por las propiedades algebraicas de la continuidad. Tenemos entonces que k es continua en 0, puesto que su denominador es distinto de cero en $x = 0$,

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)_{x=0} = 2 \neq 0.$$

Por ello,

$$\lim_{x\to 0} k(x) = k(0) = \frac{1}{2}.$$

Además por las propiedades algebraicas de los límites tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} h(x) &= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} \cdot \lim_{x\to 0} k(x)\\ &= \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{\tan(x-3)}$.

Solución.

$$\begin{aligned}h(x) = \frac{x^2-2x-3}{\tan(x-3)} &= \frac{(x+1)(x-3)}{\dfrac{\operatorname{sen}(x-3)}{\cos(x-3)}}\\ &= \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}(x-3)}{x-3}}(x+1)\cos(x-3).\end{aligned}$$

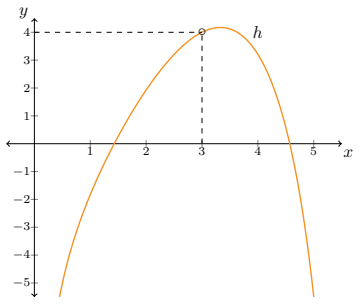


Figura 1.19: Función h cerca del punto $a = 3$.

Por la continuidad de las funciones trigonométricas y de los polinomios, tenemos que

$$\lim_{x\to 3}[(x+1)\cos(x-3)] = [(x+1)\cos(x+3)]_{x=3} = 4.$$

Calculemos $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\operatorname{sen}(x-3)}{x-3}$, aplicando el teorema de cambio de variable para límites con $a = 3$, $g(x) = x-3$, y $f(y) = \dfrac{\operatorname{sen} y}{y}$. Verifiquemos las hipótesis del teorema 8.

- Existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$:

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}(x-3) = 0 =: b,$$

  por continuidad de los polinomios.

- Existe $\lim\limits_{y\to b} f(y)$:

$$\lim_{y\to b} f(y) = \lim_{y\to b} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1 =: L,$$

- Y además se cumple que f no está definida en 0.

Por lo que podemos aplicar el teorema de cambio de variable y se obtiene que

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(x-3)}{x-3} = 1.$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{\tan(x-3)} = \frac{1}{1}4 = 4.$$

Ejercicios Propuestos

1. Use el teorema de cambio de variable para calcular,

   a) $\lim_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

   b) $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}-\frac{1}{t}} \right)$

2. Si existe, halle el valor del límite dado. Haga uso de las siguientes igualdades

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

   De ser el caso, realice un cambio de variable adecuado.

   a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+1)}{x-1}$

   b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^2}$

   c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$

1.7 Teorema del sánduche

Teorema 9: Teorema del sánduche

Sean $a \in \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$ y $h\colon C \to \mathbb{R}$ tres funciones tales que sus dominios contienen un intervalo abierto I centrado en a, excepto, quizás, el punto a. Supongamos que se verifican las desigualdades:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \text{ para todo } x \in I \setminus \{a\}$$

y las igualdades:

$$L = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x).$$

Entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Ejercicios

1. Use el teorema del sánduche para calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 1} (x-1)^2 \cos\left(\frac{\pi}{x-1}\right).$$

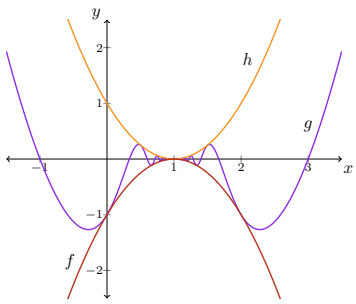


Figura 1.20: Funciones f, g y h alrededor de 1.

Solución. Como $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{x-1}\right) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R} - 1$ y $(x-1)^2 > 0$, se tiene que

$$-(x-1)^2 \leq (x-1)^2 \cos\left(\frac{\pi}{x-1}\right) \leq (x-1)^2,$$

sean $f(x) = -(x-1)^2$, $g(x) = (x-1)^2 \cos\left(\frac{\pi}{x-1}\right)$ y $h(x) = (x-1)^2$. Las funciones f y h son continuas por ser polinomios, por lo que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0;$$
$$\lim_{x\to 1} h(x) = h(1) = 0.$$

Se puede entonces aplicar el teorema del sánduche y concluir que

$$\lim_{x\to 1} (x-1)^2 \cos\left(\frac{\pi}{x-1}\right) = 0.$$

2. Diga si se puede aplicar el teorema del sánduche para calcular $\lim_{x\to 1} k(x)$ si se conoce que para todo x, se verifica la desigualdad siguiente:

$$|k(x) + 3| \leq (x-1)^4.$$

Solución. Si tomamos $f(x) = 0$, $g(x) = |k(x) + 3|$ y $h(x) = (x-1)^4$, tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

Por otra parte, tenemos que: $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$, por ser f una función constante.
Además, $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1) = 0$, por ser h continua, al ser un polinomio.
Se puede aplicar el teorema del sánduche y concluir que

Note que $f(x) = 0$ no es la única posible elección para este ejercicio.

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} |k(x) + 3| = 0,$$

por lo que $\lim_{x\to 1} [k(x) + 3] = 0$ y

$$\lim_{x\to 1} k(x) = -3.$$

3. Aplique el teorema del sánduche para calcular

$$\lim_{x\to 3} (x-3)^6 p(x),$$

Sabiendo que $|p(x)| \leq 13\pi$.

Solución. Dado que $|p(x)| \leq 13\pi$, sabemos:

$$-13\pi < p(x) < 13\pi,$$

y como $(x-3)^6 \geq 0$ tenemos:

$$-13\pi(x-3)^6 < p(x) < 13\pi(x-3)^6$$

tomando $f(x) = -13\pi(x-3)^6$ y $g(x) = 13\pi(x-3)^6$ sabemos que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 0,$$

y,

$$\lim_{x\to 3} g(x) = g(3) = 0.$$

Por el teorema del sánduche tenemos:

$$\lim_{x\to 3} (x-3)^6 p(x) = 0.$$

Ejercicios Propuestos

1. Aplique el teorema del sánduche para calcular,

a) $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

1.8 Límites unilaterales

Definición 7: Definición de límites unilaterales

Sean:

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo abierto que contiene el número a; y
3. f una función real definida en I, salvo, tal vez, en a; es decir, $I \subset \text{Dom}(f) \bigcup \{a\}$.

Entonces:

$$L = \lim_{x \to a^+} f(x),$$

(se lee: L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a *a por la derecha*) si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

siempre que $0 < x - a < \delta$ (es decir, siempre que $x > a$ y $x - a < \delta$).

Análogamente:

$$L = \lim_{x \to a^-} f(x),$$

(se lee: L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a *a por la izquierda*) si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

siempre que $0 < a - x < \delta$ (es decir, siempre que $x < a$ y $a - x < \delta$).

Simbólicamente:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)[0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon].$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)[0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon].$$

Teorema 10:

L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima al número a si y solo si existen los dos límites unilaterales y son iguales a L. Es decir, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Definición 8: Función continua por la derecha en un punto

Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$, donde $I \subseteq A$ es un intervalo abierto, es *continua por la derecha en a* si y solo si:

1. $a \in I$;
2. existe $\lim_{x \to a^+} f(x)$; y
3. $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Definición 9: Función continua por la izquierda en un punto

Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$, donde $I \subseteq A$ es un intervalo abierto, es *continua por la izquierda en a* si y solo si:

1. $a \in I$;
2. existe $\lim_{x\to a^-} f(x)$; y
3. $f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.

Ejercicios

1. Dibuje la gráfica de f y determine, si existen, los límites para el valor de a dado:

$$\lim_{x\to a^-} f(x),\ \lim_{x\to a^+} f(x),\ \lim_{x\to a} f(x),$$

para

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{si} \quad |x| < 3 \\ x+1 & \text{si} \quad |x| \geq 3 \end{cases} \quad \text{para } a = 3.$$

Solución. Para f cuando $|x| < 3$, tenemos que

$$y = f(x) = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9,$$

por lo que el gráfico de f para $|x| < 3$ es la parte superior de la circunferencia de radio 3 centrada en el origen.

Por otro lado, f en $|x| \geq 3$ son dos trozos de recta de ecuación $y = x + 1$.

Podemos determinar que:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4,$$

y por consiguiente no existe $\lim_{x\to 3} f(x)$.

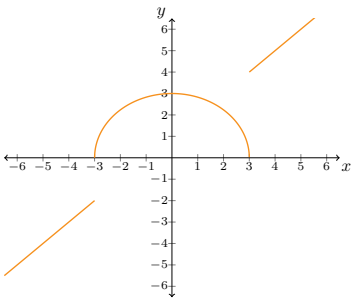


Figura 1.21: Función f de ecuación:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{si} \quad |x| < 3 \\ x+1 & \text{si} \quad |x| \geq 3. \end{cases}$$

2. Calcule, el siguiente límite, si existe. En caso de no existir, demuéstrelo

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x^2-3x+2}.$$

Solución. Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$, demostremos que el $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ no existe.

Si el $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ existiera, tendríamos que f es acotada cerca de 2 por la izquierda, es decir existe $M \geq 0$ y $r > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M \text{ para todo } x \in]2-r, 2[.$$

Tenemos que

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}.$$

Si tomamos $x \in \left]2-\frac{1}{2}, 2\right[$, es decir $\frac{3}{2} < x < 2$, tendremos que,

$$\frac{5}{2} < x+1 < 3,$$

y

$$\frac{1}{2} < x-1 < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{x-1} < 2.$$

Por lo tanto $\frac{5}{2} < \frac{x+1}{x-1} < 6$ y como $\frac{1}{x-2} < 0$,

$$6\frac{1}{x-2} < f(x) < \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x-2} < 0.$$

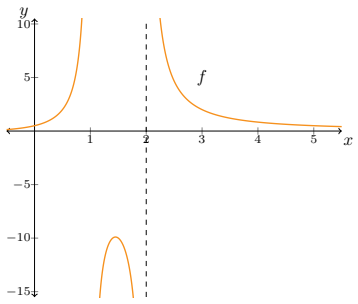


Figura 1.22: Función f de ecuación: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$, cerca a 2.

Por consiguiente, si $x \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$ se tiene que,

$$|f(x)| > \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{|x-2|}.$$

Como $\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{|x-2|} > M$ cuando $|x-2| < \frac{5}{2M}$, tendremos que $|f(x)| > M$ si

$$2 - \frac{5}{2M} < x < 2 \text{ y } \frac{3}{2} < x < 2.$$

Esto se tiene para

$$x \in]2-r, 2[\bigcap \left]\frac{3}{2}, 2\right[\bigcap \left]2 - \frac{5}{2M}, 2\right[$$

Esto contradice el hecho que para todo $x \in]2-r, 2[$ se tiene que,

$$|f(x)| \leq M.$$

El supuesto de que existe el $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ es entonces falso y por consiguiente no existe $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

3. Pruebe que no existe el límite

$$\lim_{x\to -1} f(x), \text{ si } f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

Solución. Para probar que el $\lim_{x\to -1} f(x)$ no existe, calculamos los límites laterales para comparar los resultados.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} (x-3) \\ &= (x-3)|_{x=-1} \\ &= -4. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} (2x+1) \\ &= (2x+1)|_{x=-1} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x),$$

por lo que no existe $\lim_{x\to -1} f(x)$.

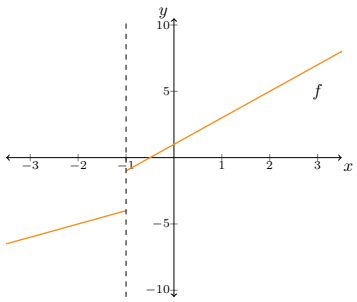


Figura 1.23: Función f de ecuación $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$ cerca a -1.

4. Con ayuda de las propiedades de la función log se puede calcular, sin recurrir al uso de una calculadora electrónica, el valor de $W(10^6)$, dado por:

$$W(10^6) = \lfloor \log_2(10^6+1) \rfloor + 1.$$

En primer lugar, el lector debe recordar que la función $\log_2$ es estrictamente creciente y $\log_2(x)$ es un número real al que hay que elevar 2 para obtener x. Es decir:

$$y = \log_2(x) \iff x = 2^y.$$

Solución. Sea $W_n = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor + 1$, para $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $2^{19} = 524\,288$, $10^6 + 1 = 1\,000\,001$ y $2^{20} = 10\,448\,576$ por lo que

$$2^{19} < 10^6 + 1 < 2^{20}.$$

Como $\log_2$ es una función estrictamente creciente, se tiene que:

$$\log_2(2^{19}) < \log_2(10^6+1) < \log_2(2^{20})$$

y como $\log_2(2^n) = n$ para todo $n > 0$, se tiene entonces que

$$19 < \log_2(10^6+1) < 20,$$

por consiguiente $W(10^6) = \lfloor \log_2(10^6+1) \rfloor + 1 = 20$.

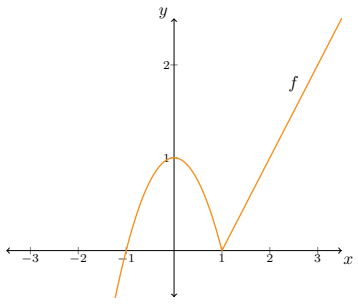


Figura 1.24: Función f de ecuación:
$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \alpha(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$
con $\alpha = 1$.

5. Sea
$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \alpha(x-1) & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$
¿Existen valores de α para los cuales f sea continua?

Solución. Sean $g(x) = 1-x^2$, $h(x) = \alpha(x-1)$, las funciones g y h son continuas por ser polinomios.

Tenemos que $f = g$ en el intervalo $I_1 =]-\infty, 1]$, por lo que f es continua en $]-\infty, 1[$ y continua en 1 por la izquierda. Así, si aplicamos el teorema de funciones localmente iguales, tenemos:
$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = g(1) = 0.$$
Y para que f sea continua en 1 basta probar que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$. Como $f = h$ en $I_2 =]1, +\infty[$ y h es continua en I_2, por el teorema de funciones localmente iguales sabemos que
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1+} h(x) = h(1) = 0.$$
Podemos concluir que f es continua en 1 para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, además f es continua en I_1 e I_2 debido a la continuidad de las funciones g y h.

Ejercicios Propuestos

1. Muestre que $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

2. Determine para qué valores,
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$
es continua.

3. Demostrar mediante la definición correspondiente que,

   a) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1} = 0$

   b) $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{3x-x^2}}{\sqrt{9-x^2}} = 0$

1.9 Límites infinitos y al infinito

Definición 10: Límites infinitos

Sean:

1. a un número real;
2. I un intervalo abierto que contiene el número a; y
3. f una función real definida en I, salvo, tal vez, en a; es decir, $I \subset \text{Dom}(f) \bigcup \{a\}$.

Se dice que f *tiende a infinito cuando* x *tiende al número* a, y se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, si y solo si para todo $R > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > R,$$

siempre que $x \in \text{Dom}(f)$ y $0 < |x - a| < \delta$.
Análogamente, se dice que $f(x)$ *tiende a menos infinito cuando* x *tiende al número* a, y se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, si y solo si para todo $R < 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < R,$$

siempre que $x \in \text{Dom}(f)$ y $0 < |x - a| < \delta$.

Definición 11: Definición de límites al infinito

Sean:

1. L un número real;
2. I un intervalo abierto del tipo $(a, +\infty)$; y
3. f una función real definida en I; es decir, $I \subset \text{Dom}(f)$.

Se dice que L *es el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* $+\infty$, y se escribe

$$L = \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

siempre que $x \in \text{Dom}(f)$ y $x > R$. Análogamente, si

1. L un número real;
2. I un intervalo abierto del tipo $(-\infty, a)$; y
3. f una función real definida en I; es decir, $I \subset \text{Dom}(f)$,

se dice que L *es el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* $-\infty$, y se escribe

$$L = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $R < 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

siempre que $x \in \text{Dom}(f)$ y $x < R$.

1.9.1 Ejercicios

1. Mediante la definición correspondiente, demuestre que:

   a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-2}{x^2+|x|} = -\infty$

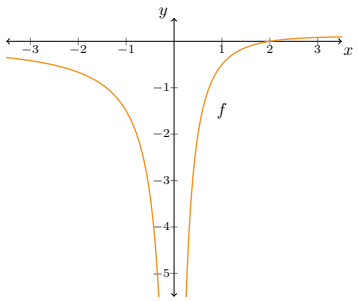


Figura 1.25: Función f de ecuación $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+|x|}$ cerca de 0.

Demostración. La definición correspondiente al ejercicio es:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff (\forall R > 0)(\exists \delta > 0)[0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -R].$$

Dado $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+|x|}$ y $a = 0$. Sea $R > 0$, debemos hallar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x| < \delta$ entonces $f(x) < -R$.
Búsqueda de δ:
Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x| < \delta$, con $\delta > 0$ por determinar.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x-2}{x^2+|x|} &= \frac{x-2}{|x|^2+|x|} \\ &= \frac{x-2}{|x|+1} \cdot \frac{1}{|x|} \\ &= g(x) \cdot \frac{1}{|x|}, \end{aligned}$$

donde $g(x) = \dfrac{x-2}{|x|+1}$.
Si restringimos los valores de δ a aquellos que $\delta \leq 1$ tendremos que:

$$\begin{aligned} 0 < |x| < \delta \leq 1 &\Rightarrow |x| \leq 1 \\ &\Rightarrow -1 < x < 1 \\ &\Rightarrow -3 < x-2 < -1 \\ &\Rightarrow 1 < -(x-2) < 3. \end{aligned}$$

Por otra parte, $|x| \leq 1 \Rightarrow 0 < |x|+1 \leq 2$, por lo que $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{|x|+1}$.
Por lo tanto, con los resultados anteriores podemos decir que:

$$\frac{1}{2} < \frac{-(x-2)}{|x|+1},$$

entonces,

$$g(x) = \frac{x-2}{|x|+1} < -\frac{1}{2},$$

por lo que

$$f(x) = g(x)\frac{1}{|x|} = \frac{x-2}{|x|+1} \cdot \frac{1}{|x|} < -\frac{1}{2}\frac{1}{|x|}.$$

debido a que $|x| > 0$.

Esto significa que si $0 < |x| < \delta \leq 1$ entonces

$$f(x) = g(x) \cdot \frac{1}{|x|} < -\frac{1}{2}\frac{1}{|x|} < -R$$
$$\Uparrow$$
$$|x| < \frac{1}{2R}$$
$$\Uparrow$$
$$|x| < \delta \leq \frac{1}{2R}.$$

Tenemos entonces que si se cumple simultáneamente que $\delta \leq 1$ y $\delta \leq \frac{1}{2R}$, se tiene que $f(x) < -R$. Por lo que basta tomar:

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{1}{2R}\right\}.$$

Sea $\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{1}{2R}\right\}$, demostremos que si $0 < |x| < \delta$ entonces $f(x) < -R$.
Supongamos que $0 < |x| < \delta$, por demostrar que $f(x) < -R$.

$$f(x) = g(x) \cdot \frac{1}{|x|}, < -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|x|} \qquad \text{porque } 0 < |x| < \delta \leq 1;$$
$$< -R \qquad\qquad \text{porque } |x| < \delta \leq \frac{1}{2R}.$$

Lo que concluye la demostración. □

b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 1} = 2$

Demostración. La definición correspondiente al límite requerido en este ejercicio es:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists A > 0)[A < x \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon]$$

Aplicamos esta definición con $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 1}$; y $L = 2$.
Sea $\epsilon > 0$, debemos hallar $A > 0$ tal que si $x > A$ entonces $|f(x) - 2| < \epsilon$.
Búsqueda de A:
Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > A$, con $A > 0$ por determinar

$$|f(x) - 2| = \left|\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 1} - 2\right| = \frac{|2x^2 - 5x + 1 - 2(x^2 + 1)|}{x^2 + 1}$$
$$= \frac{|5x + 1|}{x^2 + 1}$$
$$= \frac{5x + 1}{x^2 + 1},$$

dado que $x > A > 0$.

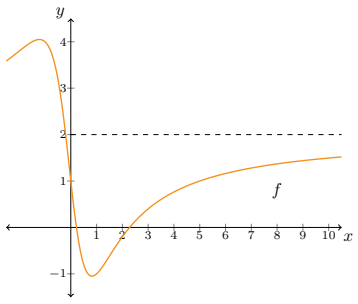


Figura 1.26: Función f definida como $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 1}$.

Si restringimos los valores de A tomando $A \geq 1$ tendremos que $x > A \geq 1$ por lo que $x > 1$ y, puesto que $x^2 + 1 > x^2$, tenemos que:

$$|f(x) - 2| = \frac{5x+1}{x^2+1} < \frac{5x+x}{x^2} = \frac{6}{x}.$$

Como $\frac{6}{x} < \epsilon$ si $x > \frac{6}{\epsilon}$ y esta última desigualdad se obtiene si $x > A \geq \frac{6}{\epsilon}$, vemos que si simultáneamente $A \geq 1$ y $A \geq \frac{6}{\epsilon}$ se obtiene que

$$|f(x) - 2| < \frac{6}{x} < \epsilon.$$

Entonces, basta tomar

$$A = \text{máx}\left\{1, \frac{6}{\epsilon}\right\}.$$

Probemos que si $x > A$ entonces $|f(x) - 2| < \epsilon$.
Supongamos que $x > A$. Demostremos que $|f(x) - 2| < \epsilon$

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &< \frac{6}{x} && \text{porque } x > A \geq 1; \\ &< 6\frac{1}{\frac{6}{\epsilon}} && \text{porque } x > A \geq \frac{6}{\epsilon}; \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. □

c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 0$

Demostración. La definición correspondiente es:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff (\forall \epsilon < 0)(\exists A > 0)[x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon]$$

Usaremos esta definición con $f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{x}$ y $L = 0$.
Búsqueda de A:
Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < -A$, con $A > 0$ por determinar.

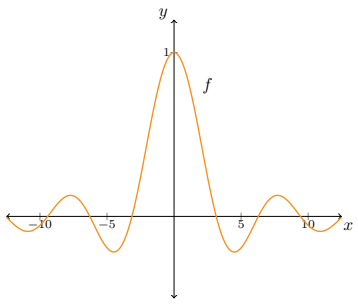


Figura 1.27: Función f de ecuación $f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{x}$.

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\frac{\text{sen}\, x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} \\ &= -\frac{1}{x}, \end{aligned}$$

dado que $x < -A < 0$. Entonces tendremos

$$|f(x)| = -\frac{1}{x} < \epsilon,$$

si $x < -\frac{1}{\epsilon}$, por lo que basta tomar $A = \frac{1}{\epsilon}$.
Debemos probar que si $x < -\frac{1}{\epsilon}$ entonces $|f(x)| < \epsilon$.
Supongamos que $x < -\frac{1}{\epsilon}$ entonces

$$|f(x)| < -\frac{1}{x} < \epsilon.$$

Lo que concluye la demostración.

□

2. Calcule los límites dados

a) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{|x+1|}$

Solución. Si $x < -1$ se tiene que $x+1 < 0$ y por ello $|x+1| = -(x+1)$.
Entonces, si $x < -1$ tenemos que

$$\frac{x+1}{|x+1|} = \frac{x+1}{-(x+1)} = -1.$$

Y aplicando el teorema de funciones localmente iguales se tiene que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{|x+1|} = \lim_{x\to-\infty} (-1) = -1.$$

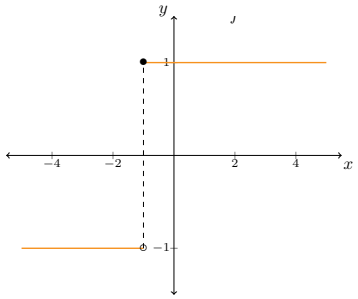


Figura 1.28: Ecuación $y = \dfrac{x+1}{|x+1|}$ cerca de 1.

b) $\lim_{x\to1} \dfrac{(2x-1)(4-3x)}{|x-1|}$

Solución. Por continuidad de los polinomios tenemos que

$$\lim_{x\to1} (2x-1)(4-3x) = [(2x-1)(4-3x)]\,|_{x=1} = -1.$$

Además, $\lim_{x\to1} |x-1| = 0^+$. Se tiene que

$$\lim_{x\to1} \frac{(2x-1)(4-3x)}{|x-1|} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

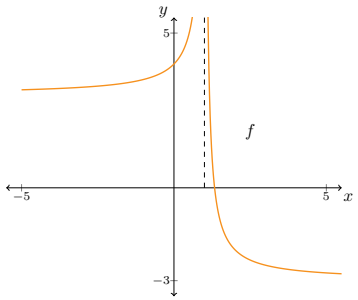


Figura 1.29: Función f de ecuación $f(x) = \dfrac{(2x-1)(4-3x)}{|x-1|}$ cerca de 1.

3. Demostrar la siguiente propiedad de límite al infinito.

a) Si f es acotada y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ entonces,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar $A > 0$ tal que, si $x > A$ entonces $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < \epsilon$. Como f es acotada, existe $M > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $|f(x)| \leq M$.
Además se tiene por hipótesis del ejercicio que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, que por definición equivale a que

$$\forall R > 0\, \exists B = B(R) > 0 \,\text{tal que}\; x > B(R) \Longrightarrow g(x) > R \Longrightarrow |g(x)| > R$$

Escribimos $B(R)$ para indicar que B depende de R, aunque B no es una función de R.

Con estos antecedentes tenemos que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \frac{M}{|g(x)|} < \epsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|g(x)| > \frac{M}{\epsilon}$$
$$\Uparrow$$
$$x > B\left(\frac{M}{\epsilon}\right),$$

con $R = \dfrac{M}{\epsilon}$.

En efecto, si $x > A = B\left(\dfrac{M}{\epsilon}\right)$ tenemos que $|g(x)| > \dfrac{M}{\epsilon}$ por lo que $\dfrac{M}{|g(x)|} < \epsilon$, de donde

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \frac{M}{|g(x)|} < \epsilon.$$

□

4. Determine si la curva de ecuación $y = f(x)$ tiene asíntotas verticales u horizontales para las siguientes funciones

   a) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x+2}$

   Solución. Primero factoramos el denominador de f,

   $$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

   Entonces f es continua, salvo en 1 y 2.
   Como

   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty,$$

   la recta de ecuación $x = 1$ será una asíntota vertical del gráfico de f si se verifica que, por la izquierda, por la derecha o ambas lados f es monótona cerca de 1.
   Análogamente, la recta de ecuación $x = 2$ será asíntota vertical del gráfico de f verificando las propiedades de monotonía cerca de 2 por los dos lados.
   Por otra parte, como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ se tiene que la recta de ecuación $y = 2$ es asíntota horizontal del gráfico de f, por ambos lados.

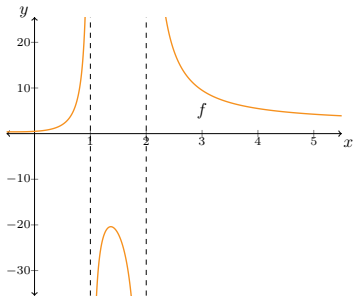


Figura 1.30: Función f de ecuación $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x+2}$ y sus asíntotas.

b) $f(x) = \dfrac{2}{1-|x+1|}$

Solución. Analicemos la función f

$$f(x) = \frac{1}{1-|x+1|} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(x+1)} = \dfrac{1}{x+2} & \text{si} \quad x \leq -1, \\ \dfrac{1}{1-(x+1)} = -\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \geq -1, \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$, la recta de ecuación $x = -2$ será, una asíntota vertical del gráfico de f si esta función es es monótona cerca de -2 por la izquierda, por la derecha o por ambos lados.

Análogamente, como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, la recta de ecuación $x = 0$ será una asíntota vertical del gráfico de f si ésta es monótona cerca de cero.

Por otra parte, $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$, por lo que la recta de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal del gráfico de f por los dos lados.

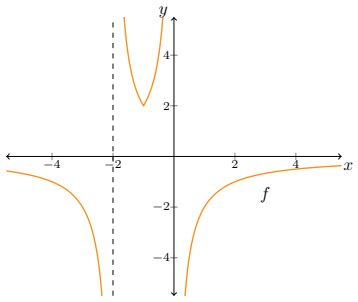


Figura 1.31: Función f de ecuación $f(x) = \dfrac{2}{1-|x+1|}$ y sus asíntotas.

5. Hallar las asíntotas horizontales u oblicuas de f si:

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

Solución. Como la función raíz cuadrada es continua para $\mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$ y el polinomio $x^2 + 3 > 0$ en $\mathbb{R}$, el denominador es continuo al igual que el numerador, por lo que f es continua. Por ello no existen asíntotas verticales del gráfico de f.

Como

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \pm 1,$$

entonces la recta de ecuación $y = 1$ es asíntota horizontal del gráfico de f por la derecha, mientras que la recta de ecuación $y = -1$ lo es por la izquierda.

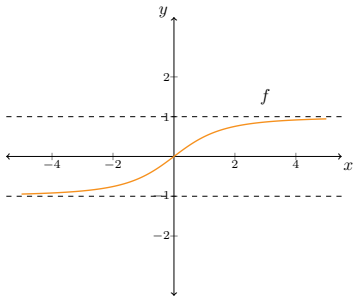


Figura 1.32: Función f de ecuación $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ y sus asíntotas.

b) $f(x) = e^{-x^2} + 2$

Solución. Para este caso como la función f es la composición de un polinomio y una función exponencial y ambas son funciones continuas, f es continua, por lo que el gráfico de f no tiene asíntotas verticales.

Como $\lim\limits_{x\to 2^\pm} f(x) = 2$, la recta de ecuación $y = 2$ es asíntota horizontal del gráfico de f por los dos lados.

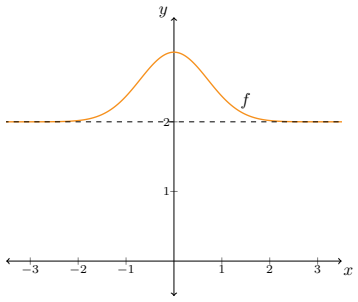


Figura 1.33: Función f de ecuación $f(x) = e^{-x^2} + 2$ y su asíntota.

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{(x+3)\pi}{2}\right)}{x-2}$

Solución. La función f es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^{\pm}} f(x) &= \lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{2x^2 - 5x + 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{(x+3)\pi}{2}\right)}{x-2} \\ &= \frac{1}{0^{\pm}} \\ &= \pm\infty.\end{aligned}$$

Entonces la recta de ecuación $x = 2$ podría ser asíntota vertical del gráfico de f si ésta es monótona cerca de 2 por la izquierda, derecha o ambos lados.

Sea

$$\begin{aligned}m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - 5x + 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{(x+3)\pi}{2}\right)}{x^2 - 2x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 2x} + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(x+3)\pi}{2}\right)}{x^2 - 2x} \\ &= 2 - 0 = 2.\end{aligned}$$

El segundo límite es cero dado que el numerador es una función acotada y denominador tiende al infinito.

Sea

$$\begin{aligned}b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] &= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2 - 5x + 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{(x+3)\pi}{2}\right)}{x-2} - x\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{-x + 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{(x+3)\pi}{2}\right)}{x-2}\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left[-1 + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(x+3)\pi}{2}\right)}{x-2}\right] \\ &= -1 + 0 = -1.\end{aligned}$$

Se tiene entonces que la recta de ecuación $y = mx + b$, es decir $y = 2x - 1$, es asíntota oblicua del gráfico de f por la derecha e izquierda.

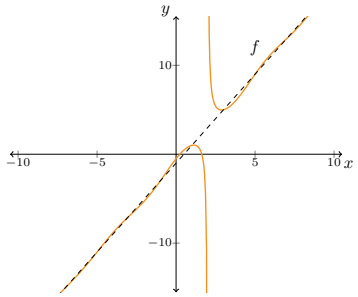


Figura 1.34: Función f de ecuación $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{(x+3)\pi}{2}\right)}{x-2}$ y su asíntota.

Ejercicios Propuestos

1. Demostrar mediante la definición correspondiente que,

   a) $\lim_{t\to\infty} \dfrac{8t^2 + 4}{3t^2 - t + 2} = \dfrac{8}{3}$

   b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x^2} = +\infty$

2. Hallar las asíntotas de f si,

   a) $f(x) = \dfrac{x^2(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$

   b) $f(x) = \dfrac{4-x}{(4-x)^3}$

   c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$

2 Derivada

2.1 Motivación de la derivada

Definición 12: Recta tangente

Dada una función real f definida en un intervalo abierto I y $a \in I$, diremos que el gráfico de f tiene una recta tangente en el punto $(a, f(a))$ si existe

$$m := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En este caso, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(a) = m(x - a).$$

Definición 13: Razón de Cambio

Sean $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x \mapsto y = f(x)$. Para $x_0 \in I$ y $x \in I$ tales que $x \neq x_0$, si

$$y_0 = f(x_0), \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0,$$

la razón de cambio de y respecto de x en el intervalo de extremos x_0 y x es

$$f'(x_0; x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definición 14: Razón de Cambio Instantánea

Si una variable y depende de una variable x mediante una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y, para un x_0 dado existe:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x_0, x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

diremos que $f'(x_0)$ es la razón de cambio instantánea de y con respecto a x.

Ejercicios

1. Hallar, si existe, la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función f en el punto $P(a, f(a))$:
   La ecuación será $y = f(a) + m(x-a)$, con $m = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

   a) $f(x) = \sqrt{2+x}$, $a = 0$

   Solución. Sea $f(x) = \sqrt{2+x}$, $a = 0$, $f(a) = \sqrt{2}$, tenemos que:

$$m = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} \right)$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2+x-2}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})},$$

   por el teorema del límite de funciones localmente iguales,

$$m = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}.$$

   Además, por propiedades algebraicas de los límites y gracias a la continuidad de los polinomios se tiene que

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

   Finalmente la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(0, f(0))$ será:

$$y = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x.$$

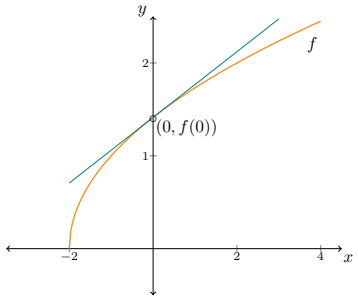


Figura 2.1: Función f de ecuación $f(x) = \sqrt{2+x}$ y su recta tangente en el punto $(0, f(0))$.

   b) $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(3x)$, $a = \frac{\pi}{6}$

   Solución. Sea $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(3x)$, $a = \frac{\pi}{6}$ y $f(a) = 2$,

$$m = \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}}$$
$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\,\mathrm{sen}(3x) - 2}{x - \frac{\pi}{6}}$$
$$= 2 \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{sen}(3x) - 1}{x - \frac{\pi}{6}}.$$

   Para hallar este límite, utilizaremos el teorema de cambio de variable, con $y = g(x) = 3x - \dfrac{\pi}{2}$, y $F(y) = 3\dfrac{\cos y - 1}{y}$, de lo que

$$b = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} = 0,$$

   por la continuidad de los polinomios.

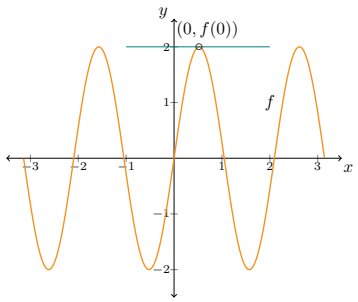


Figura 2.2: Función f de ecuación $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(3x)$ y la recta tangente a f en el punto $(\frac{\pi}{6}, 2)$.

Por otro lado,

$$F(g(x)) = \frac{\operatorname{sen}(3x)-1}{x-\frac{\pi}{6}} = \frac{\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-1}{\frac{1}{3}y}$$
$$= 3\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} y + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos y - 1}{y}$$
$$= 3\frac{\cos y - 1}{y},$$

con $x = \frac{1}{3}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$.
Por lo que:

$$l = \lim_{y\to b} F(y) = \lim_{y\to 0} 3\frac{\cos y - 1}{y} = 0,$$

considerando que $\lim_{y\to 0}\frac{\cos y - 1}{y} = 0$.
Además, como no existe $F(0)$, se cumplen todas las condiciones del teorema de cambio de variable para el límite y obtenemos que:

$$m = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} F(g(x)) = 2\lim_{y\to 0} F(y)) = 0.$$

Finalmente, la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ es:

$$y = 2.$$

2. ¿Para qué valores de a, el gráfico de f tiene una recta tangente en $P(a, f(a))$?. Para estos valores. ¿Cuál es la pendiente m_a?

   a) $f(x) = x\sqrt[3]{x}$

Solución. Sea $a \in \mathbb{R}$, por determinar.

$$m_a = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^{4/3}-a^{4/3}}{x-a},$$

Como

$$\frac{x^{4/3}-a^{4/3}}{x-a} = \left(\frac{x^{4/3}-a^{4/3}}{x-a}\cdot\frac{x^{8/3}+a^{4/3}x^{4/3}+a^{8/3}}{x^{8/3}+a^{4/3}x^{4/3}+a^{8/3}}\right)$$
$$= \frac{x^4-a^4}{(x-a)(x^{8/3}+a^{4/3}x^{4/3}+a^{8/3})}$$
$$= \frac{(x^2+a^2)(x+a)(x-a)}{(x-a)(x^{8/3}+a^{4/3}x^{4/3}+a^{8/3})},$$

aplicando del teorema de límite de funciones localmente iguales y el teorema del límite de la raíz n-ésima, tendremos que:

$$m_a = \lim_{x\to a}\frac{x^{4/3}-a^{4/3}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x^2+a^2)(x+a)}{(x^{8/3}+a^{4/3}x^{4/3}+a^{8/3})}$$
$$= \frac{(2a^2)(2a)}{3a^{8/3}}$$
$$= \frac{4}{3}a^{1/3}.$$

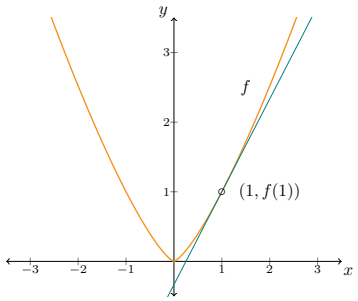


Figura 2.3: Función f de ecuación $f(x) = x\sqrt[3]{x}$ y su recta tangente en el punto $(1, f(1))$.

En resumen, para todo $a \in \mathbb{R}$ existe la recta tangente al gráfico de f en $(a, f(a))$, su pendiente es $m_a = \frac{4}{3}a^{1/3}$ y su ecuación es:

$$y - f(a) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{a}(x - a).$$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

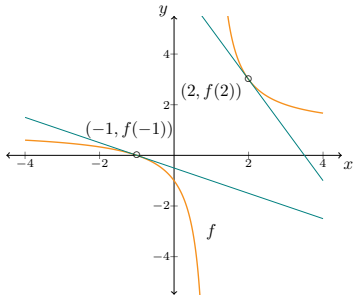


Figura 2.4: Función f de ecuación $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ con las rectas tangentes en los puntos $(-1, f(-1))$ y en el punto $(2, f(2))$.

Solución. Como el dominio de f es $\mathbf{D}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, sean $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, por determinar y $x \in \mathbb{R} - \{1, a\}$.
Tenemos que $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x-1}$,

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\left(1 + \frac{2}{x+1}\right) - \left(1 + \frac{2}{a+1}\right)}{x - a} \\ &= \frac{-2(x-a)}{(x-a)(x-1)(a-1)} \\ &= \frac{-2}{(x-1)(a-1)},\end{aligned}$$

para $x \neq a$.
Aplicando el teorema del límite de funciones localmente iguales, propiedades algebraicas de los límites y tomando en cuenta la continuidad de los polinomios, obtenemos:

$$m_a = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{-2}{(x-1)(a-1)} = -\frac{2}{(a-1)^2}.$$

Así, la recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$ existe para todo $a \neq 1$, su pendiente es $m_a = -\dfrac{2}{(a-1)^2}$, y su ecuación es:

$$y - f(a) = -\frac{2}{(a-1)^2}(x - a).$$

c) $f(x) = \cos(3x)$

Solución. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ por determinar.

$$m_a = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\cos(3x) - \cos(3a)}{x - a}.$$

Si tomamos el cambio de variable $y = g(x) = 3(x - a)$, con $F(y) = 3\left[\cos(3a)\dfrac{\cos(y) - 1}{y} - \operatorname{sen}(3a)\dfrac{\operatorname{sen}(y)}{y}\right]$, tenemos por la continuidad de g por ser un polinomio, que

$$b = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a}[3(x - a)] = 0,$$

y además, puesto que $x = \dfrac{1}{3}y + a$,

$$\begin{aligned}F(g(x)) = \frac{\cos(3x) - \cos(3a)}{x - a} &= 3\frac{\cos(y + 3a) - \cos(3a)}{y} \\ &= 3\frac{\cos(3a)\cos(y) - \operatorname{sen}(3a)\operatorname{sen}(y) - \cos(3a)}{y} \\ &= 3\left[\cos(3a)\frac{\cos(y) - 1}{y} - \operatorname{sen}(3a)\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\right] \\ &=: F(y).\end{aligned}$$

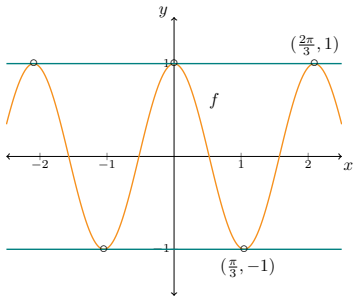


Figura 2.5: Función f de ecuación $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ y su recta tangente en los puntos $(\frac{\pi}{3}, -1)$ y $(\frac{3\pi}{2}, 1)$.

Utilizando propiedades de los límites y límites notables, se tiene que:

$$l = \lim_{y\to b} F(y) = \lim_{y\to 0} 3\left[\cos(3a)\frac{\cos(y)-1}{y} - \operatorname{sen}(3a)\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\right]$$
$$= -3\operatorname{sen}(3a).$$

Y como no existe $F(0)$, podemos aplicar el teorema de cambio de variable para límites y obtenemos que:

$$m_a = \lim_{x\to a} F(g(x)) = \lim_{y\to 0} F(y) = -3\operatorname{sen}(3a).$$

Así podemos concluir que la recta tangente al gráfico de f en $a, f(a)$ existe para todo $a \in \mathbb{R}$ y su pendiente es $m_a = -3\operatorname{sen}(3a)$, y tiene la forma

$$y - f(a) = -3\operatorname{sen}(3a)(x-a).$$

3. Para la función f y $x_0 \in \mathbb{R}$ dados, y para $\triangle x \in \{0.001; 0.01; 0.1; 1\}$, calcule $\triangle y$ si $y = f(x)$. Para los valores $\triangle x$ y x_0, calcule los incrementos relativos $\frac{\triangle x}{x_0}$ y $\frac{\triangle y}{y_0}$, donde $y_0 = f(x_0)$.

a) $f(x) = x^3 - 3$, $x_0 = 2$

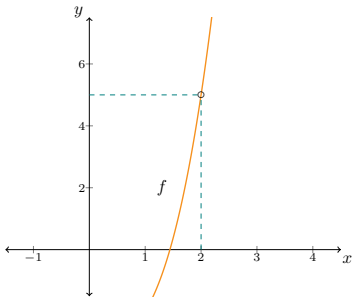


Figura 2.6: Función f de ecuación $f(x) = x^3 - 3$.

Solución. En la tabla siguiente se tienen los incrementos relativos que se expresan porcentualmente. Aquí $x = x_0 + \Delta x$, $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0) = 5$ y $\Delta y = y - y_0$.

Δx	x	$f(x)$	Δy	$\frac{\Delta x}{x_0}100\,\%$	$\frac{\Delta y}{y_0}100\,\%$
1	3	24.000	19.000	50.00 %	350.00 %
0.1	2.1	6.261	1.261	5.00 %	25.22 %
0.01	2.01	≈ 5.121	≈ 0.121	0.50 %	2.41 %
0.001	2.001	≈ 5.012	≈ 0.012	0.05 %	0.24 %

b) $f(x) = \cos(\pi x)$, $x_0 = \dfrac{1}{6}$

Solución. En la tabla siguiente se tienen los incrementos relativos que se expresan porcentualmente. Aquí $x = x_0 + \Delta x$, $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\Delta y = y - y_0$.

Δx	x	$f(x)$	Δy	$\frac{\Delta x}{x_0}100\,\%$	$\frac{\Delta y}{y_0}100\,\%$
1	≈ 1.167	-0.866	-1.732	600.0 %	$-200.00\,\%$
0.1	≈ 0.267	0.669	-0.197	60.0 %	$-22.04\,\%$
0.01	≈ 0.177	0.850	-0.016	6.0 %	$-1.86\,\%$
0.001	≈ 0.168	0.864	-0.002	0.6 %	$-0.18\,\%$

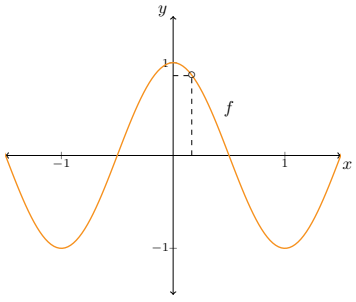


Figura 2.7: Función f de ecuación $f(x) = \cos(\pi x)$.

4. Para la función f dada, observe que la razón de cambio promedio en un intervalo de extremos x_0 y $x_0 + \triangle x$, $f'(x_0, x_0 + \triangle x)$, aproxima a la razón de cambio instantánea en x_0, $f'(x_0)$, tomando 10 valores de $\triangle x$ cercanos a x_0

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 1$$

$x = x_0 + \Delta x$, $f(x_0) = 1$, $f'(x_0, x_0 + \Delta x) = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ y $f'(x_0) = -1$.

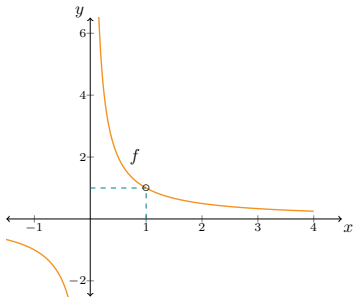


Figura 2.8: Función f de ecuación $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solución. En la tabla se presentan los resultados para valores de x cercanos a x_0.

Δx	$x = 1 + \Delta x$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x_0, x_0 + \Delta x)$
0.1	1.100	0.909	−0.909
0.01	1.010	0.990	−0.990
0.005	1.005	0.995	−0.995
0.002	1.002	0.998	−0.998
−0.001	0.999	1.001	−1.001
−0.002	0.998	1.002	−1.002
−0.005	0.995	1.005	−1.005
−0.01	0.990	1.010	−1.010
−0.1	0.900	1.111	−1.111

5. Si a un precio de p dólares la demanda de un bien es de x unidades y si $x = D(p)$, halle la elasticidad de la demanda para el precio p_0 dado. ¿Cómo varía la demanda si el precio baja 5 %? ¿Y si sube 5 %?. Si tomamos $D(p) = 1000\sqrt{40 - p}$, $1 \leq p < 40$ y $p_0 = 10$.

Solución. Si $\eta(p)$ es la elasticidad de la demanda para el precio p,

$$\eta(p) = \frac{p_0}{D(p)D'(p)}$$

Por otra parte:

$\dfrac{\Delta x}{x_0}100\,\%$ es la variación porcentual de la demanda;

$\dfrac{\Delta p}{p_0}100\,\%$ es la variación porcentual del precio; y,

$$\frac{\Delta x}{x_0}100\,\% \approx \eta(p_0) \cdot \frac{\Delta p}{p_0}100\,\%.$$

En este ejemplo, $D(p) = 1000\sqrt{40 - p}$; $D'(p) = -\dfrac{500}{\sqrt{40 - p}}$; y, $p = p_0 = 10$, tenemos que:

$$D(p_0) = D(10) = 1000\sqrt{30};$$
$$D'(p_0) = D'(10) = -\frac{500}{\sqrt{30}};$$
$$\eta(p_0) = \eta(10) = \frac{10}{1000\sqrt{30}} \cdot \frac{-500}{\sqrt{30}} = -\frac{1}{6}.$$

Si $\dfrac{\Delta p}{p_0}100\,\% = 5\,\%$,

$$\frac{\Delta x}{x}100\,\% \approx \left(-\frac{1}{6}\right)5\,\% \approx -\frac{5}{6}\,\% \approx -0.83\,\%.$$

Si $\dfrac{\Delta p}{p_0}100\,\% = -5\,\%$,

$$\frac{\Delta x}{x}100\,\% \approx \left(-\frac{1}{6}\right)5\,\% \approx \frac{5}{6}\,\% \approx 0.83\,\%.$$

En resumen: Para el precio $p_0 = 10$ dólares, la elasticidad de la demanda es $-\dfrac{1}{6}$.

Si el precio sube un 5 % de la demanda bajará en aproximadamente 0.83 %; por otro lado si el precio baja un 5 %, la demanda subirá 0.83 %, aproximadamente.

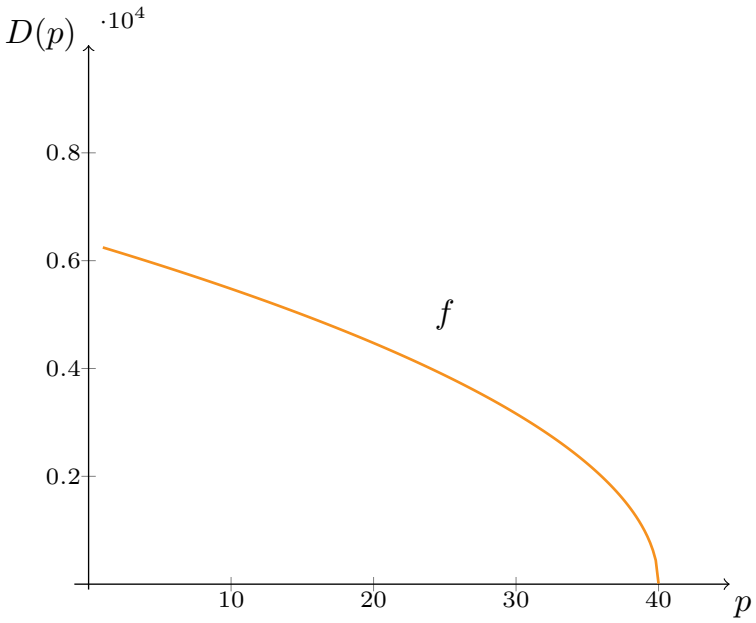


Figura 2.9: Función D que representa la demanda.

Ejercicios Propuestos

1. Hallar, si existe, la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función f en el punto $P(a, f(a))$, para

$$f(x) = 5\cos(2x), \quad a = \frac{\pi}{3}.$$

2. ¿Para qué valores de a, el gráfico de f tiene una recta tangente en $P(a, f(a))$?. Para estos valores. ¿Cuál es la pendiente m_a?.

   a) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$

   b) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)\cos x$

2.2 Derivada: Definición y propiedades

Definición 15: Derivada de una función

Sea $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $a \in D(f)$. Si existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

se dice que f es derivable en a. Este límite se representa por $f'(a)$ o por $\frac{df}{dx}(a)$, y es denominado la *derivada* de f en a. La función

$$f' : D(f') \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x)$$

donde $D(f')$ es el subconjunto de $D(f)$ donde f' existe, es denominada la *derivada* de f.

Teorema 11: Continuidad de las funciones derivables

Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

Teorema 12: Derivada de funciones localmente iguales

Sean:
a un número real;
I un intervalo abierto que contiene el número a;
f y g dos funciones definidas en I.
Si $f(a) = g(a)$ y si $f = g$ cerca de a, entonces f es derivable en a si y solo si g es derivable en a. En este caso $f'(a) = g'(a)$.

Teorema 13: Derivabilidad de funciones iguales en un intervalo abierto

Sean I un intervalo abierto; y, f y g dos funciones iguales en I. Entonces f es derivable en I si y solo si g es derivable en I. En este caso sus derivadas son iguales.

Definición 16: Derivadas unilaterales

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, notaremos, si existen:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Las derivadas $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$ se denominan *derivada de f en x_0 por la derecha y derivada de f en x_0 por la izquierda*, respectivamente.

Teorema 14: Derivada unilateral de funciones localmente iguales

Sean: a un número real; y, f y g dos funciones localmente iguales por la derecha (respectivamente por la izquierda) y tales que $f(a) = g(a)$.

Entonces

1. Existe $f'_+(a)$ (respectivamente $f'_-(a)$) si y solo si existe $g'_+(a)$ (respectivamente $g'_-(a)$).
2. Si estas derivadas unilaterales existen, son iguales.

Ejercicios

1. Halle la derivada de la función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada en el punto x indicado, usando la definición de derivada:

   a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ si $x \in \mathbb{Z}$

   Solución. Como $x_0 \in \mathbb{Z}$, tenemos que

   $$f(x) = \begin{cases} x_0, & \text{si} \quad x_0 \leq x < x_0 + 1, \\ x_0 - 1, & \text{si} \quad x_0 - 1 \leq x < x_0, \end{cases}$$

   por lo que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = x_0$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = x_0 - 1$. La función es entonces discontinua en x_0, por lo que no es derivable en x_0.

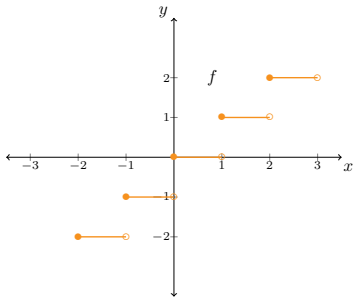
   

   Figura 2.10: Función f de ecuación $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

   b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ si $x \notin \mathbb{Z}$ Sea $n = f(x_0) = \lfloor x_0 \rfloor$. es decir, $x_0 \in]n, n+1[$. Entonces

   $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{n - n}{x - x_0} = 0.$$

   En resumen,

   $$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Z} \\ \nexists & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

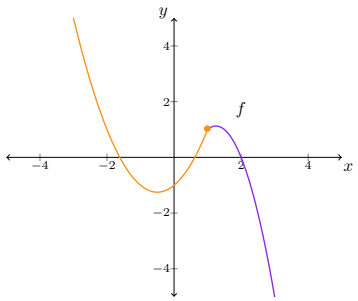


Figura 2.11: Función f de ecuación:
$f(x) = \begin{cases} x^2+x-1 & \text{si} \quad x \leq 1, \\ -2x^2+5x-2 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

2. Sea
$$f(x) = \begin{cases} x^2+x-1 =: g(x) & \text{si} \quad x \leq 1, \\ -2x^2+5x-2 =: h(x) & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$
Halle, si existen, $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$.

Solución. Como $f|_{]-\infty,1]} = g|_{]-\infty,1]}$ y como g es derivable en $\mathbb{R}$ por ser un polinomio, por el corolario del teorema de derivabilidad de funciones localmente iguales sabemos que existe $f'_-(1)$ y este es igual a $g'_-(1)$. Además por la derivabilidad de g en 1, $g_-(1) = g'(1) = (2x+1)|_{x=1} = 3$.
Por lo tanto, $f'_-(1) = 3$.
Como $f|_{]1,+\infty[} = h|_{]1,+\infty[}$ se tiene que:
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} h(x),$$
por el teorema del límite de funciones localmente iguales, y como
$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = h(1) = 1,$$
dada la continuidad del polinomio h. Por otra parte, dado que $f(1) = g(1) = (x^2+x-1)|_{x=1} = 1$, tenemos que f es continua en 1 por la derecha y como en este caso $f(1) = g(1) = h(1)$, se tiene que:
$$f|_{[1,+\infty[} = h|_{[1,+\infty[}.$$
Al ser h es un polinomio es derivable y, por el corolario de derivabilidad de funciones localmente iguales, se tiene que
$$f'_+(1) = h'_+(1).$$
Por la derivabilidad de h en 1 se tiene que:
$$h'_+(1) = h'(1) = (-4x+5)|_{x=1} = 1.$$
Por lo que $f'_+(1) = 1 \neq 3 = f'_-(1)$. Por lo tanto $\nexists f'(1)$.

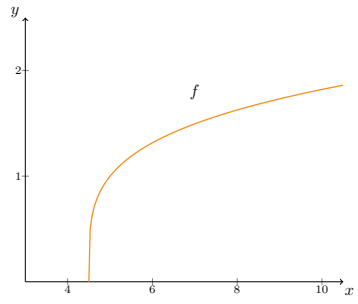


Figura 2.12: Función f, con ecuación $f(x) = \sqrt[4]{2x-9}$.

3. Pruebe que f no es derivable en el punto indicado
$$f(x) = \sqrt[4]{2x-9}, \ x = 4.5$$

Solución. Como $\mathbf{D}(f) = \{x|2x-9 \geq 0\} = [4.5, +\infty[$, es decir $f(x)$ no está definida para $x < 4.5$, la función f es discontinua en 4.5 puesto que $\nexists \lim_{x\to 4.5^-} f(x)$. En consecuencia f no es derivable en 4.5.

Ejercicios Propuestos

1. De un ejemplo de una función continua en un punto que no sea derivable en el mismo, ver en [1].

2. Halle la derivada de f mediante la definición de derivada en el punto a indicado,

   a) $f(x) = 4x^5$, $a \in \mathbb{R}$.

   b) $f(x) = \tan x$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

3. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & x > 3, \\ \dfrac{1}{x+3} & x \leq 3, \end{cases}$$

   halle si existen, $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$, si $x_0 = 3$.

2.3 Propiedades de la derivada

Proposición 2: Propiedades algebraicas I

Sean f y g dos funciones reales derivables en $a \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. *Suma*: $f+g$ es derivable en a y
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$
2. *Producto*: fg es derivable en a y
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
3. *Inverso multiplicativo*: Si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ es derivable en a y
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

Proposición 3: Propiedades algebraicas II

Sean f y g dos funciones reales derivables en $a \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. *Escalar por función*: λf es derivable en a y
$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$
2. *Resta*: $(f-g)$ es derivable en a y
$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$
3. *Cociente*: si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es derivable en a y
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

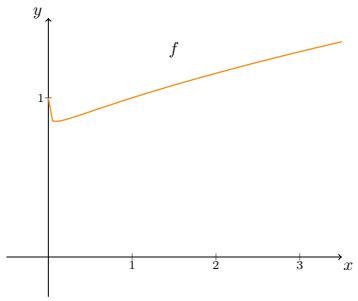


Figura 2.13: Función f de ecuación $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 1$.

Ejercicios

Halle $f'(x)$ usando las propiedades algebraicas de la derivada y que $(x^a)' = ax^{a-1}$ para $a \in \mathbb{R}$.

1. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 1$

Solución.

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 1 = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} + 1,$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^{\frac{1}{2}})' - (x^{\frac{1}{3}})' + (1)' \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{2}{3}} + 0 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\tan x}$

Solución.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sqrt{x})' \tan x - \sqrt{x}(\tan x)'}{\tan^2 x} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \tan x - \sqrt{x}\sec^2 x}{\tan^2 x} \\ &= \frac{\tan x - 2x\sec^2 x}{2\sqrt{x}\tan^2 x}. \end{aligned}$$

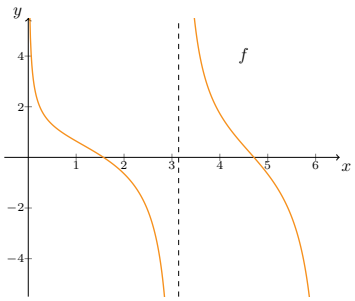


Figura 2.14: Función f de ecuación $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\tan x}$.

3. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

Solución.

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)'(\operatorname{sen} x - \cos x) - (\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x + \cos x)'}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

Como

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)' = (\operatorname{sen} x)' + (\cos x)' = \cos x - \operatorname{sen} x;$$

y,

$$(\operatorname{sen} x - \cos x)' = (\operatorname{sen} x)' - (\cos x)' = \cos x + \operatorname{sen} x,$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x - \cos x) - (\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x + \cos x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 - (\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\ &= -\frac{2(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\ &= -\frac{2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}. \end{aligned}$$

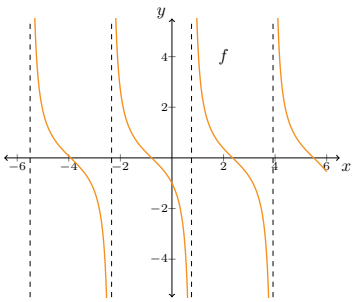


Figura 2.15: Función f de ecuación $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$.

Ejercicios Propuestos

1. Halle $f'(x)$ usando las propiedades de la derivada,

   a) $f(x) = x^2 e^x - \dfrac{x+2}{x-x^2} + \dfrac{x}{\tan x}$

   b) $f(x) = \tan x \operatorname{sen} x \cos x + \ln x e^x + \dfrac{\tan x}{\sec x}$

   c) $f(x) = \dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

   d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 + 5x + 2}$

   e) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-x^2} - \dfrac{x+1}{x^3+3}$

2.4 Regla de la cadena

Teorema 15: Regla de la cadena o derivada de la función compuesta

Sean f y g dos funciones reales tales que existe $f \circ g$, y $a \in D(f \circ g)$. Supongamos que:

1. g es derivable en a; y
2. f es derivable en $g(a)$.

Entonces la compuesta $f \circ g$ es derivable en a. Además:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Ejercicios

1. Calcule $f'(x)$.

   a) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

   Solución. Simplifiquemos f,

   $$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right).$$

   Utilizando la regla de la cadena y la derivada de la división de funciones tenemos,

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}} \cdot \frac{(-\operatorname{sen} x)(1-\cos x) - (1+\cos x)\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{-2\operatorname{sen} x}{2(1-\cos^2 x)} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$

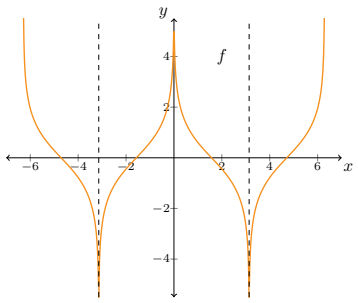


Figura 2.16: Función f de ecuación $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$.

   b) $f(x) = \sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}$

   Solución. Aplicando la regla de la cadena obtenemos,

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{x}\sqrt{3+\sqrt{x}}\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}}. \end{aligned}$$

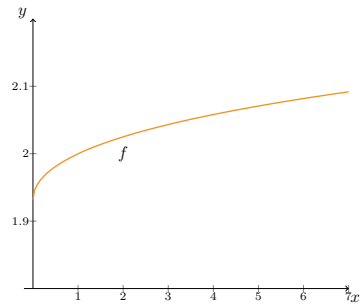


Figura 2.17: Función f de ecuación $f(x) = \sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}$.

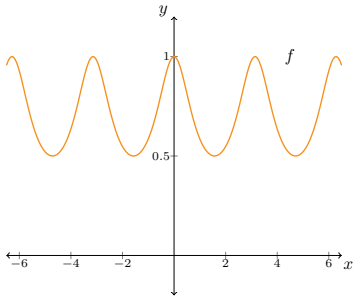


Figura 2.18: Ecuación $y = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2(x)}$.

2. Resuelva la ecuación $y'(x) = 0$ si:

a) $y = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2(x)}$

Solución. Encontremos la derivada de la función

$$y'(x) = \frac{-2\operatorname{sen} x \cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)^2} = -\frac{\operatorname{sen}(2x)}{(1+\operatorname{sen}^2 x)^2}.$$

Para que $y'(x) = 0$ se debe cumplir que $\operatorname{sen}(2x) = 0$ por lo que $2x \in \{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$ y, en consecuencia, $x \in \left\{ \dfrac{n\pi}{2} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $y = \text{máx}\{|x|^3, 7x - 6x^2\}$.

Solución. Tenemos que:

$$y = f(x) = \text{máx}\{|x|^3, 7x-6x^2\} = \begin{cases} \text{máx}\{x^3, 7x-6x^2\} & \text{si} \quad x \geq 0, \\ \text{máx}\{-x^3, 7x-6x^2\} & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Para el caso $x \geq 0$, tenemos

$$f(x) = \text{máx}\{x^3, 7x-6x^2\} = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x^3 \leq 7x-6x^2, \\ 7x-6x^2 & \text{si} \quad x^3 < 7x-6x^2. \end{cases}$$

Dado que $x^3 = 7x - 6x^2$, si y solo si $x^3 + 6x^2 - 7x = x(x+7)(x-1) = 0$, analizando signos de $x^3 + 6x^2 - 7x$ se tiene que para $x \geq 0$:

$$x^3 \leq 7x - 6x^2 \quad \text{si y solo si} \quad x \geq 1,$$

y

$$x^3 < 7x - 6x^2 \quad \text{si y solo si} \quad 0 \leq x < 1,$$

por lo que, para el caso $x \geq 0$, se tiene que

$$f(x) = \text{máx}\{x^3, 7x-6x^2\} = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \geq 1, \\ 7x-6x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Análogamente, para el caso $x < 0$ tenemos,

$$f(x) = \text{máx}\{-x^3, 7x-6x^2\} = \begin{cases} -x^3 & \text{si} \quad -x^3 \leq 7x-6x^2, \\ 7x-6x^2 & \text{si} \quad -x^3 < 7x-6x^2. \end{cases}$$

En este caso, como $-x^3 = 7x - 6x^2$ si y solo si $x^3 - 6x^2 + 7x = x(x-(3-\sqrt{2}))(x+(3+\sqrt{2})) = 0$. Analizando los signos de $x^3 - 6x^2 + 7x$ para valores $x < 0$ se tiene que $y = \text{máx}\{-x^3, 7x-6x^2\} = -x^3$.
Así la función dada se define como:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 =: g(x) & \text{si} \quad x < 0; \\ 7x-6x^2 =: h(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1; \\ x^3 =: k(x) & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

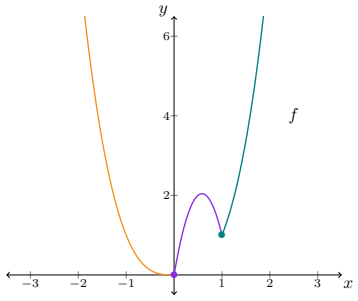


Figura 2.19: Función f de ecuación $f(x) = \text{máx}\{|x|^3, 7x-6x^2\}$.

Como g, h y k son derivables por ser polinomios y además $f = g$ en el intervalo $]-\infty, 0]$, $f = h$ en $[0,1]$ y $f = k$ en $[1, +\infty[$, por el corolario del teorema de derivabilidad de funciones localmente iguales tenemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[; \\ 7 - 12x & \text{si} \quad x \in]0, 1[; \\ 3x^2 & \text{si} \quad x \in]1, +\infty. \end{cases}$$

Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $f'(x) = 0$ si y solo si $x = \dfrac{7}{12}$.
Por otra parte, aplicando el mismo corolario,

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= g'_-(0) = g'(0) = -3x^2|_{x=0} = 0 \\ f'_+(0) &= h'_+(0) = h'(0) = (7 - 12x)|_{x=0} = 7 \\ f'_-(1) &= h'_-(1) = h'(1) = (7 - 12x)|_{x=1} = -5 \\ f'_+(1) &= k'_+(1) = k'(1) = 3x^2|_{x=1} = 3 \end{aligned}$$

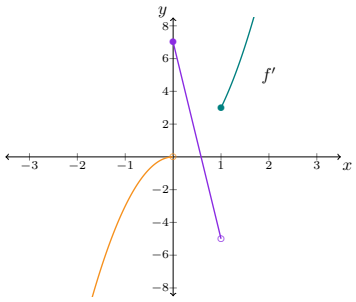


Figura 2.20: Función f' de ecuación:
$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[; \\ 7 - 12x & \text{si} \quad x \in]0, 1[; \\ 3x^2 & \text{si} \quad x \in]1, +\infty. \end{cases}$

Por lo que no existe $f'(0)$ y no existe $f'(1)$.
Tenemos finalmente que $y'(x) = 0$ si y solo si $x = \dfrac{7}{12}$.

3. Si g y h son funciones derivables, calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = \ln \left| \frac{g(x)}{h(x)} \right| \text{ si } g(x)h(x) \neq 0.$$

Solución. Dado que g y h son funciones derivables tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{g(x)}{h(x)}} \cdot \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2} = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{g(x)h(x)}.$$

4. Halle los valores de α y β en $\mathbb{R}$ de modo que la función f dada a continuación sea continua y derivable en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x & \text{si} \quad |x| \geq 2, \\ \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad |x| < 2. \end{cases}$$

Solución. Definimos

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x =: g(x) & \text{si} \quad |x| \geq 2, \\ \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) =: h(x) & \text{si} \quad |x| < 2. \end{cases}$$

Notemos que g es derivable por ser un polinomio y que h es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ por ser la composición de la función seno, que es derivable, y de una función racional derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Como $f|_{]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[} = g|_{]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[}$, se tiene por el corolario del teorema de derivación de funciones localmente iguales, y por el teorema de continuidad de funciones localmente iguales que:

$$f'(x) = g'(x) = 3\alpha x^2 + \beta \text{si } x \in]-\infty, -2[\bigcup]2, \infty[;$$

que

$$f'_-(-2) = g'_-(-2) = g'(-2) = (3\alpha x^2 + \beta)|_{x=-2} = 12\alpha + \beta;$$

y que f es una función continua en -2 por la izquierda.
Por otro lado,

$$f(-2) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} g(x) = g(-2) = 8\alpha - 2\beta;$$

$$f'_+(2) = g'_+(2) = (3\alpha x^2 + \beta)|_{x=2} = -8\alpha - 2\beta;$$

f es continua en 2 por la derecha; y

$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} g(x) = g(2) = 8\alpha + 2\beta.$$

Además, como $f = h$ en el intervalo $]-2, 2[$, por el corolario del teorema de derivabilidad para funciones localmente iguales se conoce que:

$$f'(x) = h'(x) = -\frac{1}{\pi x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

para $x \in]-2, 2[$. Además, por el teorema de límites de funciones localmente iguales, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2^+} h(x)\\ &= h(-2)\\ &= -\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right);\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} h(x)\\ &= h(2)\\ &= \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Así para todos los valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f es derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
Analicemos ahora el punto -2.
Como

$$f(-2) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = -8\alpha - 2\beta;$$

y,

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right);$$

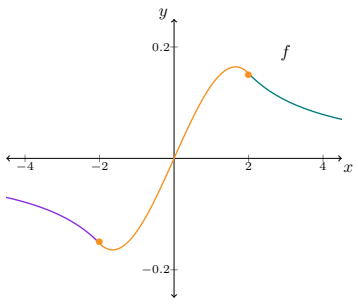


Figura 2.21: Función f con α y β para que f sea continua y derivable en $\mathbb{R}$

para que f sea continua en -2 se requiere que:

$$-8\alpha - 2\beta = -\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right). \tag{2.1}$$

Si (2.1) se cumple, tendremos que $f(-2) = h(-2)$, por lo que $f = h$ en el intervalo $[-2, 2[$, y

$$\begin{aligned} f'_+(-2) = h'_+(-2) &= h'(-2) \\ &= -\frac{1}{\pi x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)|_{x=-2} \\ &= -\frac{1}{4\pi}\cos\left(\frac{1}{2}\right); \end{aligned}$$

además como $f'_-(-2) = 12\alpha + \beta$, para que f sea derivable en -2 se requiere que

$$12\alpha + \beta = -\frac{1}{4\pi}\cos\left(\frac{1}{2}\right). \tag{2.2}$$

Resolviendo el sistema (2.1), (2.2) se tiene que f debe ser continua y derivable en -2 si:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{32\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)\right], \\ \beta &= \frac{1}{8\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\right) + 6\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Para analizar el punto 2 podemos utilizar un procedimiento similar al realizado para el punto -2, pero dado que f es impar, con los mismos valores de α y β se tiene que f es continua y derivable en 2. Por lo tanto, para α y β dados en (2.3), f es continua y derivable.

5. Halle los valores de α y β en $\mathbb{R}$ para que f sea derivable en $\mathbb{R}$ si

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si} \quad x < 0, \\ \alpha\cos x + \beta\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Solución. Definimos

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta =: g(x) & \text{si} \quad x < 0, \\ \alpha\cos x + \beta\operatorname{sen} x =: h(x) & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Notemos que g es derivable por ser un polinomio, y que h también es derivable por ser una combinación lineal de las funciones sen y cos que son derivables.
Como $f = g$ en $]-\infty, 0[$ por los teoremas de límite, continuidad y derivabilidad de funciones localmente iguales y sus corolarios, tenemos que f es continua y derivable en $]-\infty, 0[$ y además:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = g(0) = \beta.$$

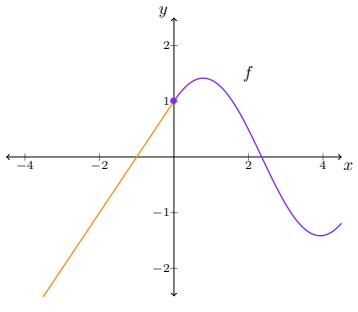


Figura 2.22: Función f con $\alpha = \beta = 1$

Como $f = h$ en el intervalo $[0, \infty[$, por las mismas razones mencionadas anteriormente tenemos que f es continua y derivable en $[0, \infty[$, continua en 0 por la derecha y adicionalmente:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} h(x) = h(0) = \alpha; \text{y},$$
$$f'_+(0) = h'_+(0) = h'(0) = (-\alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x)\,|_{x=0} = \beta.$$

Es decir que con cualquier valor de α y β, f es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$. Ahora analicemos f en 0. Como

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \alpha;$$

y,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \beta,$$

para que f sea continua en 0 se requiere que

$$\alpha = \beta \tag{2.4}$$

Si $\alpha = \beta$ se tiene además que $f(0) = g(0)$, por lo que $f = g$ en $]-\infty, 0]$, y se puede aplicar el corolario del teorema de derivabilidad de funciones localmente iguales, así:

$$f'_-(0) = g'_-(0) = g'(0) = \alpha.$$

Para que f sea derivable en 0 se requiere que $f'_-(0) = f'_+(0)$, es decir que $\alpha = \beta$, que coincide con (2.4). Finalmente tenemos que f es derivable y continua en $\mathbb{R}$ si $\alpha = \beta$.

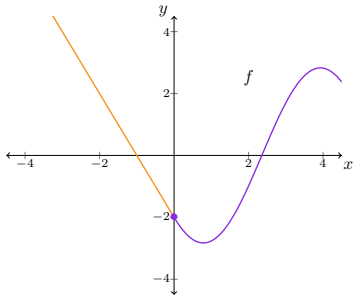


Figura 2.23: Función f para $\alpha = \beta = -2$

6. ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$, f es derivable en x?. Donde f está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}\right| & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Solución. Definimos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}\right| =: g(x) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Análisis en el punto 0:

Como $0 \leq g(x) \leq x^2$ para todo $x \neq 0$, aplicando el teorema del sánduche obtenemos que $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$. Como $f = g$ cerca de 0, el teorema del límite de funciones localmente iguales nos permite afirmar que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Como $f(0) = 0$, entonces f es continua en 0.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \left[x \left| \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{x} \right) \right| \right].$$

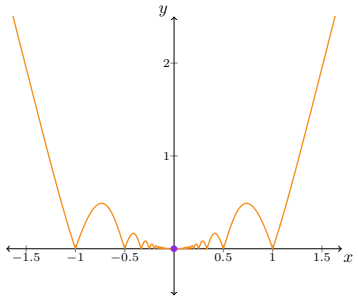


Figura 2.24: Función g, de ecuación $g(x) = x^2 \left|\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}\right|$.

Y como para todo $x \neq 0$ se tiene que

$$0 \leq \left| x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \leq |x|,$$

aplicando el teorema del sánduche tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \left| x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| = 0;$$

y, por lo tanto

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} x \left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| = 0.$$

Por otro lado, analicemos los puntos $\dfrac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$ y par ($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$),

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{4k^2}|\operatorname{sen}(2\pi k)| = 0.$$

Para x cerca de $\dfrac{1}{n}$ tenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) =: h(x) & \text{si} \quad \frac{1}{2k+1} \leq x \leq \frac{1}{2k}, \\ -x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) =: -h(x) & \text{si} \quad \frac{1}{2k} < x \leq \frac{1}{2k-1}. \end{cases}$$

Como $f = h$ en el intervalo $\left]\dfrac{1}{2k+1}, \dfrac{1}{2k}\right]$; y, $f = -h$ en el intervalo $\left]\dfrac{1}{2k+1}, \dfrac{1}{2k}\right[$, por el corolario del teorema de derivabilidad de funciones localmente iguales, se tiene que

$$\begin{aligned} f'_-\left(\frac{1}{2k}\right) = h'_-\left(\frac{1}{2k}\right) &= h'\left(\frac{1}{2k}\right) \\ &= \left[2x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)\right]_{x=\frac{1}{2k}} \\ &= -\pi \cos(2k\pi) \\ &= -\pi; \end{aligned}$$

y,

$$f'_+\left(\frac{1}{2k}\right) = h'_+\left(\frac{1}{2k}\right) = -h'_+\left(\frac{1}{2k}\right) = \pi.$$

Como

$$f'_-\left(\frac{1}{2k}\right) = -\pi \neq \pi = f'_+\left(\frac{1}{2k}\right),$$

f no es derivable en $\dfrac{1}{2k}$. Para n impar el análisis es similar. La derivabilidad de f resulta de su paridad.

7. Halle $f'(x)$ para los x en las que existe

a)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Solución. Verifiquemos si $f'(0)$ existe

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Este limite no existe.
Si existiera, digamos que es igual a $l \in \mathbb{R}$, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}\,\text{máx}\{|l-1|, |l|\}$, vemos que para todo $\delta > 0$, existe $x_1 \in \mathbb{Q} \cap]-\delta, \delta[$ y $x_2 \in]-\delta, \delta[- \mathbb{Q}$ tales que

$$\left|\frac{f(x_k)}{x_k} - l\right| = \begin{cases} |l-1| > \epsilon & \text{si} \quad k=1 \quad \text{y}, \quad \epsilon = \frac{1}{2}|l-1|, \\ |l| > \epsilon & \text{si} \quad k=2 \quad \text{y}, \quad \epsilon = \frac{1}{2}|l|. \end{cases}$$

Esto contradice la suposición $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = l$.
Si tomamos $a \neq 0$, la función f es discontinua, por lo que no existe $f'(a)$, además sabemos que f es discontinua porque no existe $\lim_{x\to a} f(x)$. Demostremos que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe, suponga-mos que existe $\lim_{x\to a} f(x) =: l$, tomamos $\frac{1}{2}\,\text{máx}\{|a-l|, |l|\}$, vemos que para todo $\delta > 0$ existe $x_1 \in \mathbb{Q} \cap]-\delta, \delta[$ y $x_2 \in]-\delta, \delta[- \mathbb{Q}$ tal que,

$$|f(x_k) - l| = \begin{cases} |a-l| > \epsilon & \text{si} \quad k=1 \quad \text{y}, \quad \epsilon = \frac{1}{2}|l-1|, \\ |l| > \epsilon & \text{si} \quad k=2 \quad \text{y}, \quad \epsilon = \frac{1}{2}|l|. \end{cases}$$

Esto contradice la suposición $\lim_{x\to a} f(x) =: l$.

b) $f(x) = \arccos(\cos x)$

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ x - 2k\pi, & \text{si} \quad 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ -x + 2(k+1)\pi & \text{si} \quad (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Si ponemos $g_k(x) = x - 2k\pi$, $h_k(x) = -x + 2(k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, las funciones g_k y h_k son derivables por ser polinomios. Además tenemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$, $f = g_k$ en el intervalo $[2k\pi, (2k+1)\pi]$; y $f = h_k$ en el intervalo $[(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi]$. Por el corolario del teorema de derivabilidad de funciones localmente iguales tenemos:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[; \\ -1 & \text{si} \quad x \in](2k+1)\pi, 2(k+1)\pi[. \end{cases}$$

Además $f'_+(2k\pi) = 1$, $f'_-(2k\pi) = -1$, $f'_+((2k+1)\pi) = -1$ y $f'_-((2k+1)\pi) = 1$, por lo que no existe $f'(x)$ para $x \in \{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$.

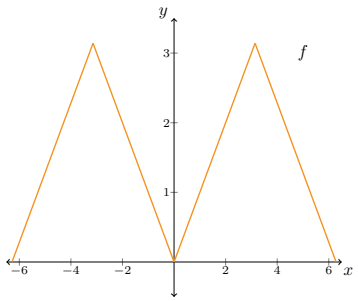


Figura 2.25: Función f con ecuación $f(x) = \arccos(\cos x)$.

8. Dé ejemplos de funciones f y g y $x_0 \in \mathbb{R}$ tales que exista $(f \circ g)'(x_0)$ pero no existe $f'(g(x_0))$ ni $g'(x_0)$.

Solución. Podemos tomar por ejemplo $x_0 = 0$; $g(x) = |x|$; y,

$$f(y) = \begin{cases} 2, & \text{si} \quad y \geq 0, \\ 0, & \text{si} \quad y < 0. \end{cases}$$

Entonces $f(g(x)) = 2$ para todo $x \in R$; pero no existe $g'(x_0)$ ni tampoco $f'(g(0)) = f'(0)$, y, existe $f(f \circ g)(0) = 0$.

9. Diga si es correcta o no la afirmación siguiente y argumente su respuesta. Sea $I =]a, b[$.

a) Si f y g son continuas por la derecha en a y si $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ para todo $x \in I$, entonces $f(x) < g(x)$ para todo $x \in I$.

Solución. La afirmación es verdadera. Supongamos que f y g funciones continuas por la derecha en a; tales que $f(a) = g(a)$; y si para todo $x \in I$ se tiene que $f'(x) < g'(x)$, entonces mostremos que para todo $x \in I$, $f(x) < g(x)$.
Sea $h(x) = g(x) - f(x)$. Entonces h es una función continua en a por la derecha, $h(a) = 0$ y para todo $x \in]a, b[$, $h'(x) > 0$.
Demostremos que para todo $x \in]a, b[$, $h(x) > 0$ mediante reducción al absurdo. Por lo que suponemos que:
Existe $k \in]a, b[$ tal que $h(k) \leq 0$, como h es derivable en $]a, k[$ y continua en $[a, k]$, por el teorema del valor intermedio, sabemos que existe $c \in]a, k[$ tal que,

$$h'(c) = \frac{h(k) - h(a)}{k - a} = \frac{h(k)}{k - a} \leq 0,$$

lo que es una contradicción.

b) Si f' es par, entonces f es impar.

Solución. Esta afirmación es falsa. Para sustentar la falsedad de esta afirmación, pongamos un contraejemplo de este enunciado.
Si tomamos $f'(x) = x^2$, f' es una función par, pero si tomamos $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ no es una función impar cuya derivada es f' una función par.

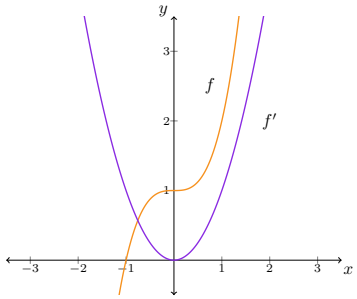


Figura 2.26: Función f y su derivada f', donde se nota que f no es impar.

c) Si f es derivable en I y $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ entonces $\lim_{x \to a^+} f'(x) = +\infty$.

Solución. Esta afirmación es falsa. Sustentamos muestra respuesta con un contraejemplo.
Si tomamos el intervalo $]a, b[=]0, 1[$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Además $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, y

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$

lo que contradice el enunciado.

Ejercicios Propuestos

1. Calcule $f'(x)$

   a) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2+2x}{x-1}\ln(x^4+2)\right)$

   b) $f(x) = \dfrac{x^3}{\ln(e^{x^2+\operatorname{sen} x}+1)}$

   c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+2}{x^4+7}\operatorname{sen}^2(x^2+\pi)\right)$

   d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+5}}$

2.5 Razones de cambio relacionadas

Definición 17: Razón de Cambio

Si una variable y depende de una variable x mediante la función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y para $x_0 \in I$ existe,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

este límite es la razón de cambio instantánea de las variables x e y en x_0 y se nota,

$$\frac{dy}{dx}(x_0) \quad \text{o} \quad f'(x_0).$$

Es decir la derivada de f en x_0, se puede interpretar como la razón de cambio instantánea de x e y. Por otra parte, si dos o más magnitudes digamos y, z, w, etc., están relacionadas entre sí, sus razones de cambio,

$$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{dw}{dx}, \ldots,$$

también están relacionadas entre sí.

Ejercicios

1. Un faro ubicado en un islote situado a 3 kilómetros de la playa emite un haz de luz que gira dando una vuelta entera cada minuto. ¿Con qué velocidad se "mueve" el punto P de la playa, iluminado por el haz de luz FP emitido por el faro cuando P está situado a 2 kilómetros del punto Q que es el punto de la playa más cercano al faro?

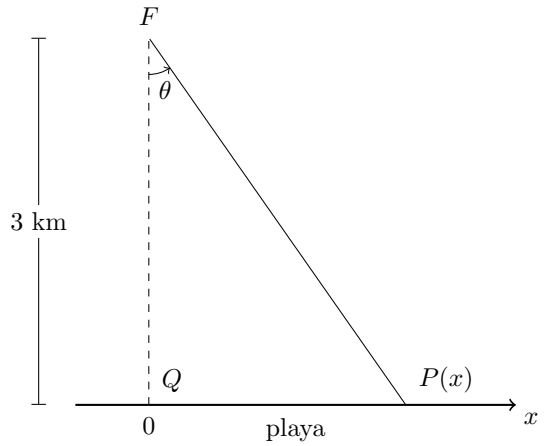


Figura 2.28: Datos del problema.

Solución. Sean

$$\begin{aligned} x[\text{km}] &= \text{distancia de } P \text{a } Q \\ t[\text{min}] &= \text{tiempo} \\ \theta[\text{rad}] &= \text{ángulo } QFP \\ \frac{d\theta}{dt}\left[\frac{\text{rad}}{\text{min}}\right] &= 2\pi \\ \frac{dx}{dt}\left[\frac{\text{km}}{\text{min}}\right] &= \text{velocidad de } P. \end{aligned}$$

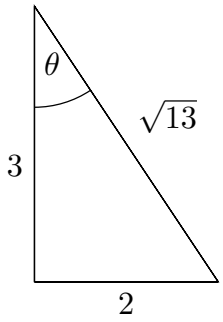


Figura 2.29: Triángulo rectángulo en el que se nota que $\sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Lo que queremos encontrar es $v = \frac{dx}{dt}$ cuando $x = 2$. Como $\tan\theta = \frac{x}{3}$, entonces:

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dx}{dt},$$

de donde tenemos que:

$$\frac{dx}{dt} = (2\pi)3\sec^2\theta,$$

para $x = 2$. Mediante la figura 2.29 razonamos que:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=2} = 6\pi\frac{13}{9} = \frac{26\pi}{3}.$$

Respuesta: El punto se mueve con velocidad de $\frac{26\pi}{3}\frac{\text{km}}{\text{min}}$ que aproximadamente es $27,23\frac{\text{km}}{\text{min}}$.

2. Una partícula se mueve en una trayectoria elíptica cuya forma está dada por la ecuación:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1.$$

Supongamos que las longitudes están expresadas en metros. Si se sabe que en el punto de la abscisa 1, ésta se incrementa a una razón de dos metros por segundo, ¿qué sucede con la ordenada del punto con la abscisa dada? Considere los casos que se derivan según los cuadrantes en los que se halla la ordenada.

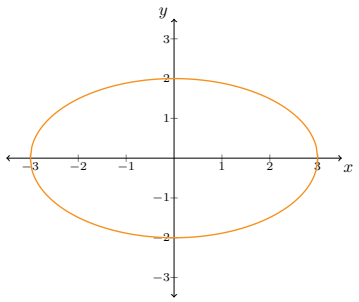


Figura 2.30: Trayectoria de la partícula, descrita por la ecuación $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$.

Solución. Sean

$$\begin{aligned} x[\text{m}] &= \text{abscisa} \\ y[\text{m}] &= \text{ordenada} \\ t[\text{seg}] &= \text{tiempo} \\ \frac{dx}{dt}|_{x=1}\left[\frac{\text{m}}{\text{seg}}\right] &= 2. \end{aligned}$$

Lo que queremos encontrar es $v = \frac{dy}{dt}$ cuando $x = 1$. Sabemos que la trayectoria de la partícula verifica la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1, \tag{2.5}$$

de donde si $x = 1$ entonces $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$ si solo si $y \in \{y_1, y_4\}$ con $y_1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}$ en el primer cuadrante y $y_4 = -\frac{4}{3}\sqrt{2}$ en el cuarto cuadrante. Derivando (2.5) con respecto a t obtenemos:

$$\frac{2}{9}x\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}y\frac{dy}{dt} = 0,$$

de donde $\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{9}\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$. Además tenemos que:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{(x,y)=(1,y_1)} = -\frac{4}{9}\frac{1}{\frac{4\sqrt{2}}{3}}2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{(x,y)=(1,y_4)} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Respuesta: La ordenada del punto $(1, y_1)$ del primer cuadrante disminuye a razón de $\frac{\sqrt{2}}{3}$ metros por segundo, mientras que la ordenada del punto $(1, y_1)$ del cuarto cuadrante incrementa con la misma velocidad.

3. Un tanque en forma de cono invertido, cuyo radio de la base mide 2 metros y su altura es de 5 metros, se introduce agua a razón de 400 litros por minuto. ¿Cómo varía el nivel del líquido en el tanque cuando contiene 2 metros cúbicos de agua?.

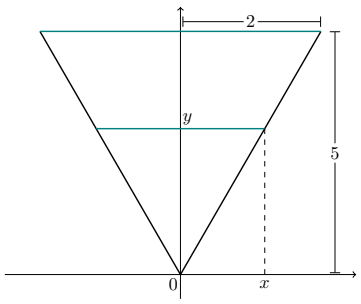


Figura 2.31: Corte transversal del tanque.

Solución. Sean:

$$\begin{aligned} t[\text{min}] &= \text{tiempo} \\ x[\text{m}] &= \text{radio del espejo de agua} \\ y[\text{m}] &= \text{nivel del agua} \\ V[\text{m}^3] &= \text{volumen de agua} \\ \frac{dV}{dt} &= 0.4 \end{aligned}$$

Tenemos que hallar $\frac{dy}{dx}$ cuando $V = 2$. Dado que el volumen del cono es

$$V = \frac{\pi}{3}x^2 y,$$

pero como la relación de x con respecto a y es de $x = \frac{2}{5}y$ tenemos,

$$V = \frac{4\pi}{75}y^3, \tag{2.6}$$

derivando la ecuación anterior obtenemos que,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{25}y^2\frac{dy}{dt},$$

y despejando $\frac{dy}{dt}$, sabemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{25}{4\pi y^2}\frac{dV}{dt}. \tag{2.7}$$

Para evaluar $\frac{dy}{dx}$ en $V = 2$ podemos utilizar la ecuación (2.6) del volumen para despejar y y reemplazar en la ecuación (2.7). Como

$$y = \sqrt[3]{\frac{75}{4\pi}V},$$

evaluando y en $V = 2$, se tiene $y(2) = \sqrt[3]{\frac{75}{2\pi}}$, y sustituyendo en (2.7) podemos decir que:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}\Big|_{V=2} &= \frac{25}{4\pi\left(\frac{75}{2\pi}\right)^{2/3}}\frac{dV}{dt},\\ &= \frac{2.5}{\pi^{1/3}}\left(\frac{2}{75}\right)^{2/3},\\ &\approx 0.1524.\end{aligned}$$

Respuesta: Podemos concluir que el nivel de agua sube a razón de $\frac{2.5}{\pi^{1/3}}\left(\frac{2}{75}\right)^{2/3}\frac{\text{m}}{\text{min}}$ que es aproximadamente $15.24\frac{\text{cm}}{\text{min}}$.

Ejercicios Propuestos

Los siguientes ejercicios fueron tomados de los textos [1, 10, 6, 5].

1. Sean A, D, C y r el área, el diámetro, la circunferencia y el radio de un círculo, respectivamente. En un determinado instante, $r = 6$ y $dr/dt = 3$ cm/s. Hallar la tasa de variación de A respecto a:

   a) r

   b) D

   c) C

   d) t

2. Cada uno de los lados de un estadio de béisbol mide 90 pies. Si la pelota se batea por la línea hacia la tercera base con una velocidad de 100 pies por segundo, ¿con qué rapidez está cambiando la distancia entre la pelota y la primera base cuando la pelota se halla a mitad del camino hacia la tercera base?

3. Un automóvil va por una autopista hacia el oeste, 90 metros al norte de ella está estacionada una patrulla de policía vial. El patrullero observa el radar y ve que el automóvil está a 150 metros de distancia de la patrulla y que la distancia que los separa está aumentando a razón de 72 metros por segundo. Hallar la velocidad del automóvil en ese instante.

4. Un aviso rectangular, que tiene 24 m de ancho, da vueltas sobre un eje vertical que pasa por su centro, a razón de 5 revoluciones por minuto. Una persona que observa a distancia el aviso lo ve como un rectángulo de ancho variable. ¿Con qué rapidez está cambiando el ancho aparente del aviso cuando éste tiene 12 m de ancho, según lo ve el observador, y, su ancho está aumentando?

5. Un pescador atrapa un pez con su caña de pescar. El pez se desplaza en dirección este-oeste a lo largo de una recta situada 30 metros al norte del pescador. Si el sedal está desenrrollándose a razón de 6 m/s cuando el pez se halla a 50 metros del pescador, ¿con qué rapidez está desplazándose el pez?.

6. Los barcos A y B salen del mismo puerto. El barco A navega hacia el oeste a razón de 20 nudos (millas náuticas por hora) y el barco B navega hacia el sur a 15 nudos. ¿A qué tasa está cambiando la distancia entre los dos barcos a las 2 p.m., si:

   a) A y B salen ambos a las 12 del día?

   b) A sale a las 12 del día y B sale a la 1 p.m.?

2.6 Derivación Implícita

Definición 18: Función Implícita

Una función se llama implícita, si la variable dependiente no se define explícitamente en términos de la variable independiente, y se representa en forma general como:

$$F(x,y)=0.$$

Teorema 16: Derivación de funciones implícitas

Para derivar funciones implícitas, se deriva ambas partes de la igualdad utilizando las técnicas de derivación y teniendo en cuenta cuál es el término dependiente en el que se utiliza la regla de la cadena.

Ejercicios

1. Si una función $f : x \to y = f(x)$ es derivable y está definida implícitamente por la ecuación dada a continuación, calcule $y' = f'(x)$.

   a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$

   Solución. Sabemos que $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ entonces $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}y'=0$, de donde $y'=\dfrac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$, si $x>0$.

   b)
   $$x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0, \tag{2.8}$$
   con
   $$x<2y-\frac{3}{4}. \tag{2.9}$$

   Solución. Sabemos que se verifica (2.8) si y solo si $(x-2y)^2=-4x+3y+7$. Además se verifica (2.9) si y solo si $4x-8y+3<0$. Derivando (2.8): $2x-4y-4xy'+8yy'+4-3y'=0$, de donde

   $$(4x-8y+3)y' = 2x-4y+4$$
   $$y' = 2\frac{x-2y+2}{4x-8y+3}.$$

2. Si una función $f : x \to y = f(x)$ es derivable y está definida implícitamente por la ecuación dada a continuación, calcule $f'(a)$.

   a)
   $$e^y + xy = e, \tag{2.10}$$
   para $y > 0$ y $a = 0$.

   b)
   $$xy + \ln y = 1, \tag{2.11}$$
   para $y < e^2$ y $a = 0$.

Solución. *a*) Sea $y_1 = y|_{x=0}$, entonces $e^{y_1} = e$, de donde $y_1 = 1$. Derivando (2.10) se obtiene:

$$e^y y' + y + xy' = 0,$$

de donde,

$$y' = -\frac{y}{e^y + x}$$
$$y'|_{(x,y)=(0,1)} = -\frac{1}{e}.$$

b) Sea $y_1 = y|_{x=0}$, entonces $\ln y_1 = 1$, y $y_1 = e$. Derivando (2.11) se obtiene:

$$y + xy' + \frac{1}{y}y' = 0,$$

de donde,

$$y' = -\frac{y}{x + \frac{1}{y}};$$
$$y'|_{(x,y)=(0,e)} = -\frac{e}{\frac{1}{e}} = -e^2.$$

Ejercicios Propuestos

1. Sobre la curva $xy + y^{1/2} = x + y$, hallar $\dfrac{dx}{dy}$ y calcular $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$.

2. Sobre la curva $y^2 + e^{xy} = \operatorname{sen}(x^2y^2) + 2$, hallar $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $(0, 1)$.

3. Dada la curva $y^3 - \dfrac{x}{y} + x^2 = xy + y$, calcular $\dfrac{dy}{dx}$ en $(2, 1)$.

4. Dada la curva $x^3 + y^3 = 16$, hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

2.7 Derivada de la función inversa

Teorema 17: Derivada de la función inversa

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, inyectiva y $f^{-1} : \text{Im}(f) \to D$ su inversa, se tiene que

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

siempre que $y \in \text{Im}(f)$ y que el denominador sea diferente de cero.

Ejercicios

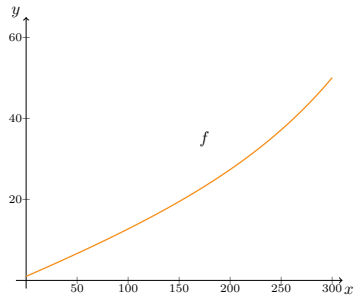


Figura 2.32: Gráfico de $f(x) = 0.1x + e^{0.01x}$.

1. Calcule la derivada $(f^{-1})'(y_0)$ en los siguientes ítems.

   a) $f(x) = 0.1x + e^{0.01x}$, $y_0 = 1$.

   Solución. Vemos que $y_0 = 1 = f(0)$, por lo que $f^{-1}(y_0) = 0$. Calculando la derivada tenemos que $f'(x) = 0.1 + 0.01e^{0.01x}$ y además:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},\\ (f^{-1})'(y_0) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},\\ &= \frac{1}{f'(0)},\\ &= 0.1 + 0.01 = 0.11.\end{aligned}$$

   b) $f(x) = e^x$, $y_0 = 1$

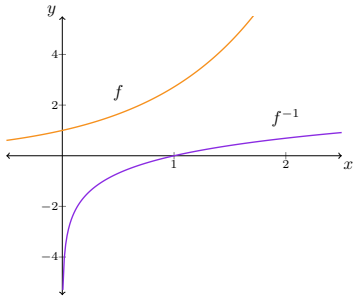


Figura 2.33: Función f y su inversa f^{-1}.

   Solución. Vemos que $y_0 = 1 = f(0)$, por lo que $f^{-1}(y_0) = 0$. Calculando la derivada tenemos que $f'(x) = e^x$ y además:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}},$$

   para el valor y_0:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) &= \frac{1}{e^0},\\ &= 1.\end{aligned}$$

2. Calcule fórmulas para las derivadas inversas de senh y tanh.

Solución.

- Calculemos para el caso de la derivada inversa de senh.

  Sabemos que $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, de donde $e^x - e^{-x} - 2y = 0$, y además

  $$\frac{e^{2x} - 2ye^x - 1}{e^x} = 0,$$

  que equivale a:

  $$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

  Resolvemos como un trinomio, tenemos

  $$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

  Como $e^x > 0$, tendremos que $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ y finalmente $x = \sinh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.
  Derivando:

  $$\left(\sinh^{-1}\right)'(y) = \frac{1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}}{y + \sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

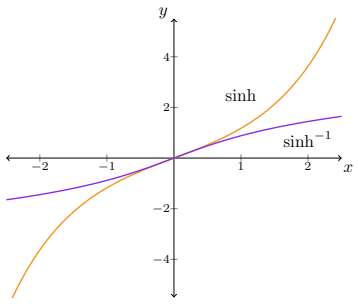
  

  Figura 2.34: Función sinh y su inversa.

  Otro procedimiento sería si $y = f(x) = \sinh x$; entonces $x = \sinh^{-1}(y)$. Además $f'(x) = \cosh x$ y

  $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}(y))}.$$

  Como $\cosh^2 = \sinh^2 + 1$, $\cosh = \sqrt{\sinh^2 + 1}$, de donde:

  $$\begin{aligned}(\sinh^{-1})'(y) &= \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(\sinh(y)) + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.\end{aligned}$$

- Si $y = f(x) = \cosh x$, despejando x tenemos $x = \cosh^{-1}(y)$ y si derivamos f obtenemos que $f'(x) = \sinh x$, y además:

  $$\begin{aligned}(\cosh^{-1})'(y) &= (f^{-1})'(y) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{\sinh(\cosh^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1}(y)) - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.\end{aligned}$$

- Si $y = f(x) = \tanh x$ despejamos $x = \tanh^{-1}(y)$ y derivamos f tenemos $f'(x) = \operatorname{sech}^2 x$; y usando la identidad $\operatorname{sech}^2 = 1 - \tanh^2$ tenemos que:

$$\begin{aligned}(\tanh^{-1})'(y) = (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sech}^2(\tanh^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{1-\tanh^2(\tanh^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{1-y^2}.\end{aligned}$$

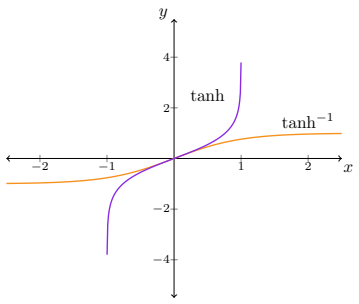


Figura 2.35: Función tanh y su inversa.

3. Calcule $(f^{-1})'$ y $Dm((f^{-1})')$ si,

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2},\ x < 0.$$

Solución. Como:

$$y = f(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1},$$

y,

$$x = f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{y}{1-y}},$$

ya que $x < 0$. Derivando obtenemos:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y) &= -\frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)'}{2\sqrt{\frac{y}{1-y}}} \\ &= -\frac{\frac{1}{(1-y)^2}}{2\sqrt{\frac{y}{1-y}}} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{y(1-y)^3}}.\end{aligned}$$

Además, $D((f^{-1})') =]0,1[$.

Ejercicios Propuestos

1. Demuestre que si f es una función invertible y continua definida sobre un intervalo I, y si $f'(f^{-1}(a)) = 0$, entonces f^{-1} no es derivable en a.

2. Suponga que f es derivable, siendo su derivada $f'(x) = (1+x^3)^{-1/2}$. Demuestre que $g = f^{-1}$ satisface $g''(x) = \dfrac{3\,(g(x))^2}{2}$.

2.8 Derivadas de orden superior

Definición 19: Derivadas de segundo orden

Sea $a \in Dm(f')$ en el cual existe la derivada de f'; es decir, existe $(f')'(a)$. Este número es denominado *segunda derivada de f en a* y es representado por:

$$f''(a) \quad \text{o} \quad \frac{d^2}{dx^2}f(a).$$

Es decir:

$$f''(a) = \frac{d^2}{dx^2}f(a) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f\right)(a) = (f')'(a).$$

Definición 20: Derivada de orden n

Sea $f : Dm(f) \to \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define:

1. $f^{(0)} = f$.
2. $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$, para $n \geq 0$.

Si existe $f^{(n)}(a)$, este número es denominado la n-ésima derivada de f en a y suele ser representado de la siguiente manera:

$$f^{(n)}(a) = \frac{d^n}{dx^n}f(a).$$

Ejercicios

1. Calcule $f^{(n)}(x)$ con $n \in \mathbb{N}$

   a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c en $\mathbb{R}$

   Solución. Calculando las derivadas de orden superior tenemos:
   $f^{(1)}(x) = 2ax + b$
   $f^{(2)}(x) = 2a$
   $f^{(3)}(x) = 0$, por lo que, si seguimos derivando f tenemos que

   $$f^{(n)}(x) = 0 \text{ para todo } n \geq 3.$$

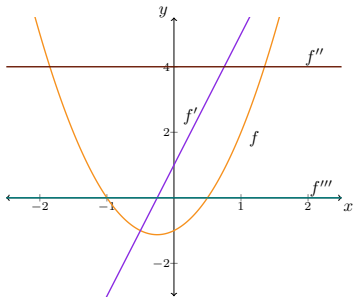


Figura 2.36: Función f con ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$, y sus derivadas.

   b) $f(x) = \ln x$

   Solución. Calculando las derivadas iteradas tenemos:
   $f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} = 0!x^{-1}$
   $f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} = -1!x^{-2}$
   $f^{(3)}(x) = 2x^{-3} = 2!x^{-3}$
   $f^{(4)}(x) = 2(-3)x^{-4} = -3!x^{-4}$
   Observamos que para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ se tiene:

   $$P(n) : f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!x^{-n}, \qquad (2.12)$$

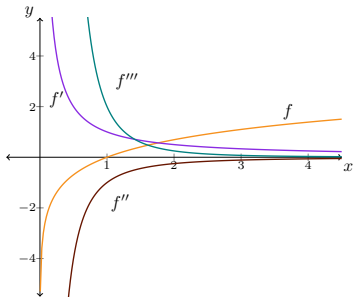


Figura 2.37: Función f con ecuación $f(x) = \ln x$ y sus derivadas.

donde $P(n)$ es la fórmula anterior, la cual se se verifica para n. Para probar que (2.12) se verifica para todo $n \geq 1$. Basta verificar que $\forall n \geq 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Sea $n \geq 1$, supongamos que $P(n)$ es válida; debemos probar que $P(n+1)$ es válida, es decir que

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+2}(n)!x^{-(n+1)}.$$

Como supusimos que $P(n)$ es válida, derivemos esa igualdad:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^n(x))' \\ &= \left[(-1)^{n+1}(n-1)!x^{-(n)}\right]' \\ &= (-1)^{n+1}(n-1)!(-n)x^{-n-1} \\ &= (-1)^{n+2}(n)!x^{-(n+1)}, \end{aligned}$$

que es la igualdad que queríamos probar.

c) $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ con $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

Solución.

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{m} k a_k x^{k-1}$$

La sumatoria empieza con $k = 1$ porque, para $f(x)$ el término correspondiente a $k = 0$ es constante.
Para la segunda derivada tenemos que:

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{m} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

La sumatoria empieza con $k = 2$ por una razón similar a la anterior.

Si generalizamos para la $i-$ésima derivada tenemos que:

$$f^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{m} k(k-1)\cdots(k-(i-1)) a_k x^{k-i}.$$

2. Halle $f^{(147)}$, si $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(3x) + 3\cos(2x) - x^{58}$.

Solución. Definimos

$$\begin{aligned} g(x) &:= \mathrm{sen}(3x); \text{y}, \\ h(x) &:= \cos(2x). \end{aligned}$$

Primero derivemos g

$$\begin{aligned}
g^{(0)}(x) &= \operatorname{sen}(3x),\\
g^{(1)}(x) &= 3\cos(3x),\\
g^{(2)}(x) &= -3^2\operatorname{sen}(3x),\\
g^{(3)}(x) &= -3^3\cos(3x),\\
g^{(4)}(x) &= 3^4\operatorname{sen}(3x),\\
g^{(5)}(x) &= 3^5\cos(3x),\\
g^{(6)}(x) &= -3^6\operatorname{sen}(3x),\\
g^{(7)}(x) &= -3^7\cos(3x),\\
g^{(8)}(x) &= 3^8\operatorname{sen}(3x).
\end{aligned}$$

Se nota en las derivadas de g que en cada 4 derivaciones se repite el siguiente patrón para $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
g^{(4k)}(x) &:= 3^{4k}\operatorname{sen}(3x),\\
g^{(4k+1)}(x) &:= 3^{4k+1}\cos(3x),\\
g^{(4k+2)}(x) &:= -3^{4k+2}\operatorname{sen}(3x),\\
g^{(4k+3)}(x) &:= -3^{4k+3}\cos(3x).
\end{aligned}$$

Para h de forma similar

$$\begin{aligned}
h^{(0)}(x) &= \cos(2x),\\
h^{(1)}(x) &= -2\operatorname{sen}(2x),\\
h^{(2)}(x) &= -2^2\cos(2x),\\
h^{(3)}(x) &= 2^3\operatorname{sen}(2x),\\
h^{(4)}(x) &= 2^4\cos(2x),\\
h^{(5)}(x) &= -2^5\operatorname{sen}(2x),\\
h^{(6)}(x) &= -2^6\cos(2x),\\
h^{(7)}(x) &= 2^7\operatorname{sen}(2x),\\
h^{(8)}(x) &= 2^8\cos(2x).
\end{aligned}$$

y obtenemos para h y $k \in \mathbb{N}$ que:

$$\begin{aligned}
h^{(4k)}(x) &= 2^{4k}\cos(2x)\\
h^{(4k+1)}(x) &= -2^{4k+1}\operatorname{sen}(2x),\\
h^{(4k+2)}(x) &= -2^{4k+2}\cos(2x),\\
h^{(4k+3)}(x) &= 2^{4k+3}\operatorname{sen}(2x).
\end{aligned}$$

Por otro lado como $(x^n)^{(n+1)} = 0$ para todo $n \geq 1$ sabemos que $(x^{58})^{(147)} = 0$. Además podemos descomponer $147 = 4(36) + 3$ se puede utilizar $k = 36$ para encontrar g^{147} y h^{147}, de lo que:

$$f^{(147)}(x) = (-2)3^{147}\cos(3x) + 3(2^{147})\operatorname{sen}(2x).$$

Ejercicios Propuestos

1. Halle $f^{(199)}$, si $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$.
2. Halle $f^{(459)}$, si $f(x) = (x^2+1)^{1235}$.
3. Halle $f^{(29)}$, si $f(x) = \ln(x+1)$.
4. Halle $f^{(234)}$, si $f(x) = \operatorname{senh}(2x) + \cosh(x)$.

2.9 Diferenciales

Definición 21: Diferencial

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se llama diferencial de f en $a \in \mathbb{R}$ a la expresión dy y se define como:

$$dy = f'(a)\, dx.$$

Definición 22: Variación absoluta de una variable

Dada una variable que toma el valor de x, luego de tomar inicialmente el valor de x_0, se dice que su variación absoluta es,

$$\Delta x = x - x_0.$$

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si la variable independiente toma el valor de x, luego de tomar inicialmente el valor de x_0, produce un cambio en la variable dependiente, desde el valor $y_0 = f(x_0)$, hasta el valor $y = f(x)$.

Su variación absoluta es,

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0),$$

y podemos aproximar la variación mediante,

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \approx dy = f'(x_0)\Delta x,$$

lo que nos permite aproximar

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Ejercicios

1. Halle dy en función de x y dx si:

$$y = x \operatorname{sen} x + \cos x.$$

Solución. Como $dy = \dfrac{dy}{dx}dx$ y como $y = x \operatorname{sen} x + \cos x$, entonces:

$$\begin{aligned} dy =& \frac{dy}{dx}(x \operatorname{sen} x + \cos x)dx \\ =& (\operatorname{sen} x + x\cos x - \operatorname{sen} x)dx \\ =& x \cos x\, dx. \end{aligned}$$

2. Para los valores dados de Δx y de x dados, calcule Δy y dy

a) $y = x^2 + x + 1$, $\Delta x \in \{0.1, 0.5, 1\}$ con x=1.

Solución. Tomemos el caso $\Delta x = 0.1$ y $x = 1$ tenemos que:

$$y_0 = 1^2 + 1 + 1 = 3,$$

y,

$$y = 1.1^2 + 1.1 + 1 = 3.31,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta y &= y - y_0, \\ &= 0.31, \end{aligned}$$

y además, con $dx = \Delta x$,

$$\begin{aligned} dy &= f'(1)\,dx \\ &= (2x+1)\,dx \\ &= (2\cdot 1 + 1)\cdot 0.1 \\ &= 0.3. \end{aligned}$$

Para el caso $\Delta x = 0.5$ y $x = 1$ tenemos que:

$$y_0 = 1^2 + 1 + 1 = 3,$$

y

$$y = 1.5^2 + 1.5 + 1 = 4.75,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta y &= y - y_0 \\ &= 4.75 - 3 \\ &= 1.75, \end{aligned}$$

y además, con $dx = \Delta x$,

$$\begin{aligned} dy &= f'(1)\,dx \\ &= (2x+1)\,dx \\ &= (2\cdot 1 + 1)\cdot 0.5 \\ &= 1.5. \end{aligned}$$

Y por último si $\Delta x = 1$ y $x = 1$ tenemos que:

$$y_0 = 1^2 + 1 + 1 = 3,$$

y

$$y = 2^2 + 2 + 1 = 7,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta y &= y - y_0, \\ &= 4, \end{aligned}$$

y además, con $dx = \Delta x$

$$\begin{aligned} dy &= f'(1)\,dx \\ &= (2x+1)\,dx \\ &= (2\cdot 1 + 1)\cdot 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

3. Calcule, mediante diferenciales, un valor aproximado de:

   a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 0.1\right)$

Solución. Si f es derivable en a, $\Delta f(a) = f(a+\Delta x) - f(a) \approx df(a)$, donde $df(a) = f'(a)\Delta x$, de donde:

$$f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x. \tag{2.13}$$

En nuestro ejemplo tenemos que

$$f(x) = \operatorname{sen} x;\ a = \frac{\pi}{3} \text{ y } \Delta x = -0.1,$$

por lo que aplicando (2.13) se obtiene que,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 0.1\right) \approx& \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)(-0.1)\\ =& \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(-0.1)\\ =& \frac{\sqrt{3}-0.1}{2}.\end{aligned}$$

Es decir que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 0.1\right) \approx \frac{\sqrt{3}-0.1}{2} \approx 0.816$.

Ejercicios Propuestos

1. Calcule, mediante diferenciales el valor aproximado de:

   a) $\sqrt[3]{8.03}$

   b) $\cos(\pi + 0.02)$

   c) $\dfrac{\sqrt{3.96}-1}{\sqrt{3.96}+1}$

2.10 Cálculo de ceros de funciones derivables

Definición 23: Método de Dicotomía

Si una función f es continua en $[a,b]$ y satisface que $f(a)f(b) < 0$, entonces f tiene un cero $c \in (a,b)$ por el teorema del valor medio.
Para aproximar el valor de c, dividimos el intervalo $[a,b]$ tomando el punto medio c_1 entre a y b (punto medio $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$). Para el valor c_1 tenemos 3 posibilidades

1. $f(c_1) = 0$ por lo que $c_1 = c$, dado que c_1 es cero de f, y se termina la búsqueda.
2. $f(a)f(c_1) < 0$, se aplica la misma idea en el intervalo $[a_1, b_1]$ donde $a_1 = a$ y $b_1 = c_1$ y repetimos el procedimiento, encontrando $c_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.
3. $f(b)f(c_1) < 0$, se aplica la misma idea en el intervalo $[a_1, b_1]$ donde $a_1 = c_1$ y $b_1 = b$ y repetimos el procedimiento, encontrando $c_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

Para calcular el número de pasos para que el método encuentre la raíz c con una aproximación $\epsilon > 0$ pequeña, se tiene la desigualdad

$$\frac{b-a}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Suponiendo que se desea calcular con k cifras exactas podemos reescribir la desigualdad anterior como,

$$\frac{b-a}{2^n} < \frac{10^{-k}}{2},$$

de donde $n > 1 + \dfrac{k + \log_{10}(b-a)}{\log_{10}(2)}$.

Definición 24: Método de Newton

Sea una función f derivable podemos aproximar c, el cero de la función f, por medio de la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Para obtener x_{n+1} tomamos la recta tangente de f en el punto x_n. Donde la recta tangente corte con el eje de las x, será x_{n+1}.

Ejercicios

1. En el año 1225 Leonardo de Pisa conocido como Fibonacci, resolvió la ecuación:

   $$f(x) := x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0,$$

   y encontró que $c = 1.368808107$ es su única solución real (el método que utilizó se desconoce).

   a) Utilice el método de dicotomía para la función de Fibonacci para aproximar c en el intervalo $[0,2]$ y realice 7 iteraciones del método.

Solución. Vamos a poner los valores obtenidos en una tabla para mejor lograr una visualización del método.

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
1	0	2	1	-20	16	-7
2	1	2	1.5	-7	16	2.875
3	1	1.5	1.25	-7	2.875	-2.421
4	1.25	1.5	1.375	-2.421	2.875	0.130 85
5	1.25	1.375	1.3125	-2.421	0.130 85	$-1.168\,701$
6	1.3125	1.375	1.343 75	0.130 85	$-1.168\,701$	-0.5248
7	1.375	1.343 75	1.359 375	—	—	—

La aproximación de la raíz de la ecuación de Fibonacci en 7 pasos del método de dicotomía es $c_7 = 1.359375$.

b) Fibonacci resolvió la ecuación:

$$f(x) := x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0,$$

y encontró que $c = 1.368808107$. ¿Cuántos pasos del método de dicotomía se necesitan para hallar c con esa precisión?.

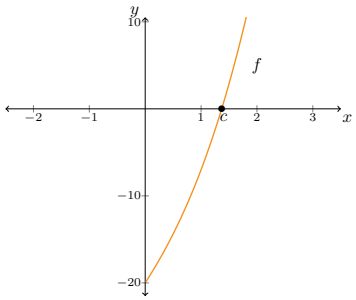


Figura 2.38: Función de Fibonacci.

Solución. Dado que la raíz encontrada por Fibonacci tiene 8 cifras decimales exactas, podemos utilizar la desigualdad,

$$\frac{b-a}{2^n} < \frac{10^{-k}}{2},$$

con $k = 8$, $a = 0$ y $b = 2$. Entonces

$$\frac{2}{2^n} < \frac{10^{-8}}{2},$$

de lo que:

$$2^{n-2} > 10^8,$$

entonces

$$n > \frac{8\ln(10)}{\ln(2)} + 2 \approx 28.575.$$

Así tenemos que $n = 29$, es decir las iteraciones del método de dicotomía son 29.

c) Calcule 4 iteraciones del método de Newton para un valor inicial de $x_0 = 0.7$.

Solución. Dado que f es una función derivable tenemos que

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10,$$

y calculamos x_{n+1} con la ecuación:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Para el caso de $n = 0$, tenemos que,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= 0.7 - \frac{(0.7)^3 + 2(0.7)^2 + 10(0.7) - 20}{3(0.7)^2 + 4(0.7) + 10} \\ &\approx 1.51829. \end{aligned}$$

Segunda iteración:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ &= 1.51829 - \frac{(1.51829)^3 + 2(1.51829)^2 + 10(1.51829) - 20}{3(1.51829)^2 + 4(1.51829) + 10} \\ &\approx 1.375034. \end{aligned}$$

Tercera iteración:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\ &\approx 1.36881931. \end{aligned}$$

Cuarta iteración:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \\ &\approx 1.368808108. \end{aligned}$$

Por lo tanto en la cuarta iteración del método de Newton tenemos que la aproximación de la raíz de f es 1.368808108. Es una mejor aproximación que la obtenida con el método de dicotomía.

2. ¿En cuántos pasos el método de dicotomía le permitirá calcular la raíz de $\operatorname{senh} x + 2$ con 3 cifras decimales exactas?

Solución. Para calcular cuántos pasos necesita el método de dicotomía para calcular la raíz de $g(x) := \operatorname{senh} x + 2$ necesitamos un intervalo que contenga la raíz de g, por lo que vamos a calcular $g(-2) \approx -1.6286$ y $g(0) = 2$ por lo que $g(-2)g(0) < 0$ lo que nos dice que la raíz de g está en $(-2, 0)$. Aplicando la fórmula dada en la descripción del método de Dicotomía con $a = -2$, $b = 0$ y $k = 3$ tenemos,

$$\frac{0 - (-2)}{2^n} < \frac{10^{-3}}{2},$$

entonces

$$n > \frac{3}{\ln 2} + 2$$

y $n > 6.32$, por lo que basta tomar $n = 7$ para hallar la raíz de g con una precisión de tres decimales.

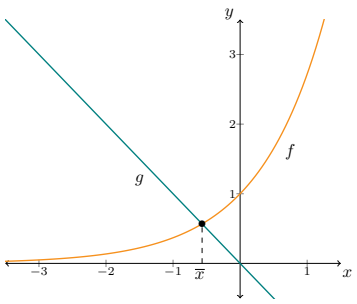


Figura 2.39: Funciones f, g y su punto de intersección $\bar{x}$.

3. Mediante el método de Newton encuentre aproximadamente el punto de intersección de las gráficas de las funciones f y g de ecuaciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = -x$, con un valor inicial de $x_0 = 0.75$ y con 2 iteraciones.

Solución. Para encontrar el punto de intersección de las gráficas de las dos funciones dadas tenemos que igualarlas, es decir resolver la ecuación

$$e^x = -x, \qquad \text{o} \qquad e^x + x = 0.$$

Si definimos $h(x) := e^x + x$ y encontramos el cero de h mediante el método de Newton podemos encontrar la intersección de las gráficas de las dos funciones. Sabemos que para el método de Newton, las aproximaciones del cero de h para $n \in \mathbb{N}$ están dadas por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n}{e^{x_n} + 1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{e^{x_0} + x_0}{e^{x_0} + 1} \\ &= 0.75 - \frac{e^{0.75} + 0.75}{e^{0.75} + 1} \\ &\approx -0.169. \end{aligned}$$

La segunda iteración

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{e^{x_1} + x_1}{e^{x_1} + 1} \\ &= -0.169 - \frac{e^{-0.169} - 0.169}{e^{-0.169} + 1} \\ &\approx -0.534, \end{aligned}$$

la aproximación del punto de intersección $\overline{x}$ es -0.534. Podemos ver gráficamente como se aplicó el método de Newton para la función h.

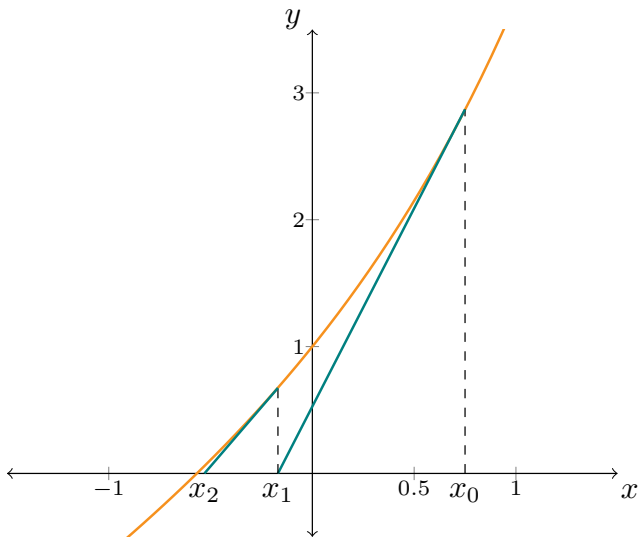


Figura 2.40: Método de Newton para la función h con $x_0 = 0.75$.

Ejercicio Propuesto

1. Dada,

$$f(x) = x^5 + x + 12.$$

a) Utilice 8 pasos del método de dicotomía para aproximar la raíz de f en el intervalo $[-3, -1]$.

b) ¿Cuántos pasos del método de dicotomía permite calcular la raíz de f con 5 cifras decimales exactas?

c) Calcule 4 iteraciones del método de Newton para un valor inicial $x_0 = -0.5$.

3 Aplicaciones de la derivada

3.1 Monotonía, extremos y puntos críticos

Definición 25: Conjunto acotado por arriba y por abajo

Un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ es *acotado por abajo (arriba)* si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq c$ ($x \leq c$) para todo $x \in A$. A c se le llama *cota inferior (superior) de* A. Adicionalmente si A es acotado por arriba y abajo, A se dice *acotado*.

Definición 26: Ínfimo supremo mínimo y máximo

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Entonces, se define

1. Ínfimo de A ($\text{ínf}\, A$) como la mayor de las cotas inferiores de A si A es acotado por abajo, o $-\infty$ si no.
2. Supremo de A ($\sup A$) como la menor de las cotas superiores de A si A es acotado por arriba, o $+\infty$ si no.
3. Mínimo de A ($\text{mín}\, A$) como el $\text{ínf}\, A$ si $\text{ínf}\, A \in A$ e $\text{ínf}\, A > -\infty$.
4. Máximo de A ($\text{máx}\, A$) como el $\sup A$ si $\sup A \in A$ y $\sup A < +\infty$.

Definición 27: Función acotada

Sean $\Omega \neq \emptyset$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Entonces, la función f es:

1. **Acotada por abajo (arriba)** si y solo si el conjunto $\text{Im}\,(f)$ es acotado por abajo (arriba).
2. **Acotada** si y solo si el conjunto $\text{Im}\,(f)$ es acotado.

Teorema 18: Caracterización de función acotada

Sean $\Omega \neq \emptyset$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Entonces, la función f es:

1. **acotada por abajo** si y solo si existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) \geq c_1,$$
2. **acotada por arriba** si y solo si existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) \leq c_2,$$
3. **acotada** si y solo si existen $c_1 \in \mathbb{R}$ y $c_2 \in \mathbb{R}$ tales que
$$c_1 \leq f(x) \leq c_2,$$
4. **acotada** si y solo si existe $R > 0$ tal que
$$|f(x)| < R,$$

para todo $x \in \Omega$.

Definición 28:

Sean $\Omega \neq \emptyset$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Definimos:

1. $\inf\limits_{x\in\Omega} f(x) = \inf \operatorname{Im} f$.
2. $\sup\limits_{x\in\Omega} f(x) = \sup \operatorname{Im} f$.
3. $\min\limits_{x\in\Omega} f(x) = \min \operatorname{Im} f$.
4. $\max\limits_{x\in\Omega} f(x) = \max \operatorname{Im} f$.

Definición 29: Existencia de los extremos globales para funciones continuas

Sean a y b en $\mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, una función continua en $[a, b]$. Entonces existen x_m y x_M en $[a, b]$ tales que
$$f(x_m) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \text{ y } f(x_M) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$
Además, se tiene que $\operatorname{Im} f = [f(x_m), f(x_M)]$; por lo que:
$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$
para todo $x \in [a, b]$.

Definición 30: Extremos locales

Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$. Sean $\underline{x}$ y $\overline{x}$ dos elementos de I. Entonces:

1. la función f *alcanza un mínimo local o relativo en* $\underline{x}$ si y solo si existe $r > 0$ tal que

$$f(\underline{x}) \leq f(x)$$

   para todo $x \in I \bigcap]\underline{x} - r, \underline{x} + r[$.

2. la función f *alcanza un máximo local o relativo en* $\overline{x}$ si y solo si existe $r > 0$ tal que

$$f(\overline{x}) \geq f(x)$$

   para todo $x \in I \bigcap]\overline{x} - r, \overline{x} + r[$.

Definición 31: Interior de un intervalo

Sea I un intervalo. El interior de I es el intervalo abierto más grande que está contenido en I, se lo nota por I°.

Definición 32: Punto crítico

Dada una función real f, continua en un intervalo I de extremos a y b ($a < b$), y derivable en el interior de I. A un número c del interior de I se lo llama *punto crítico de* f si y solo si $f'(c) = 0$ o no existe $f'(c)$, es decir, si f no es derivable en c.

Teorema 19: Condición necesaria para extremos locales

Sean I un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ y $c \in I^\circ$. Si f alcanza un extremo local en c, entonces c es un valor crítico de f.

Definición 33: Funciones creciente y decreciente

Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$. Entonces la función f es:

1. **creciente en** I si y solo si $f(x_1) < f(x_2)$,
2. **no decreciente en** I si y solo si $f(x_1) \leq f(x_2)$,
3. **decreciente en** I si y solo si $f(x_1) > f(x_2)$,
4. **no creciente en** I si y solo si $f(x_1) \geq f(x_2)$,
5. **monótona** si y solo si es creciente o decreciente,

para todo x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$.

Teorema 20: Relación entre el signo de la derivada y la monotonía

Sean I un intervalo de extremos $a < b$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua en I y además, f derivable en $]a,b[$, entonces:

1. si $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a,b[$, entonces f es creciente en I; y
2. si $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a,b[$, entonces f es decreciente en I.

Teorema 21: Condición suficiente para extremos locales

Sean I un intervalo abierto, $c \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $I - \{c\}$. Si c es un punto crítico de f y $f'(x)$ cambia de signo en c, entonces f alcanza un extremo local en c. De manera más precisa: si $x \in I$ y

1. si $f'(x) < 0$ para todo $x < c$; y
2. si $f'(x) > 0$ para todo $x > c$,

entonces f alcanza un mínimo local en c; y

1. si $f'(x) > 0$ para todo $x < c$; y
2. si $f'(x) < 0$ para todo $x > c$,

entonces f alcanza un máximo local en c.

Teorema 22:

Si un extremo local es único también es global.

Ejercicios

1. Para cada función f, halle los puntos críticos y los intervalos de monotonía. Distinga los puntos críticos que son extremos locales.

   a) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$.

   Solución.

   - Puntos críticos: Para obtener los puntos críticos calculamos la derivada de f:

   $$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ \nexists & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

   luego $f'(x) = 0$ si solo si $\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 0$.
   Además, reescribiendo esta igualdad tenemos que

   $$\frac{4x-1}{3x^{\frac{2}{3}}} = 0$$

   si solo si $x = \frac{1}{4}$.

Por lo tanto se concluye que los puntos críticos son $x = 0$ donde no existe la derivada de f, y $\frac{1}{4}$ donde la derivada de f se anula.

- Monotonía y extremos: Realicemos un análisis del signo de f' para lo cual analizamos por intervalos definidos por los puntos de interés, que para este caso son los puntos críticos de la función f. Y los resultados los resumiremos en la siguiente tabla:

x		0		$\frac{1}{4}$	
$x^{\frac{2}{3}}$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$4x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
Esquema	$\searrow$		$\searrow$	Mín loc	$\nearrow$

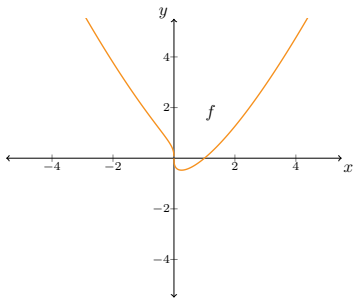


Figura 3.1: Ecuación $y = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$.

- Observaciones:
  - f es decreciente en $]-\infty, 0]$ y en $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.
  - Como f es continua, será entonces decreciente en $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$, y en 0 no se alcanza un extremo local.
  - Por otra parte, f es creciente en $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$ y alcanza un mínimo local en $\frac{1}{4}$.
  - El extremo local, al ser único, será también global.

b) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{1-x}}$.

Solución.

- Puntos críticos:
  Calculando la derivada obtenemos que:

$$f'(x) = -\frac{x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}},$$

para todo $x \in]-\infty, 1[$, es decir que f es derivable en todo su dominio por lo que no existen puntos críticos que cumplan la condición de que $f'(x)$ no existe . Por lo tanto los puntos críticos se hallan resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$, cuya única solución es $x = 0$.
Por lo tanto, el único punto crítico es 0.

Si se desea graficar una función f solo sabiendo los puntos críticos, adicionalmente se puede calcular la intersección de la función con los ejes. Esto nos dará un bosquejo no muy preciso de la función pero nos puede servir para análisis posteriores.

- Monotonía y extremos:
  La monotonía y los extremos de la función se ilustran en la siguiente tabla:

x		0		1
$-x$	$+$	0	$-$	-1
$(1-x)^{\frac{3}{2}}$	$+$	$+$	$+$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$
Esquema	$\nearrow$	máx loc	$\searrow$	

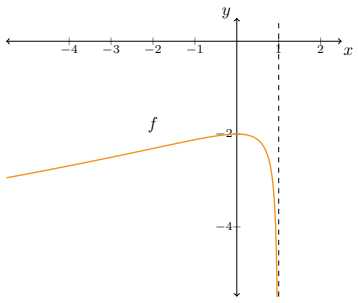


Figura 3.2: Ecuación $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{1-x}}$.

- Conclusiones:
  - f es creciente en $]-\infty, 0[$.
  - f es decreciente en $[0, 1[$.

- f alcanza un máximo local en 0 y $f(0) = -2$.
- Como en 0 se alcanza el único extremo local, será también global, es decir que $\max_{x<1} f(x) = f(0) = -2$.

c) $f(x) = 4\operatorname{sen} x + 3\cos x$

Solución. Como $f(x) = 5\left(\frac{4}{5}\operatorname{sen} x + \frac{3}{5}\cos x\right)$, si ponemos $\alpha = \arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{3}{5}$, tenemos que:

$$f(x) = 5\left(\cos(\alpha)\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\operatorname{sen}(\alpha)\right)$$

podemos escribir

$$f(x) = 5\operatorname{sen}(x+\alpha).$$

Tenemos que f es 2π-periódica, derivable en $\mathbb{R}$ y

$$f'(x) = 5\cos(x+\alpha).$$

Además $f'(x) = 0$ si solo si $\cos(x+\alpha) = 0$. Es decir que se verifica $x+\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto el conjunto C de puntos críticos de f es:

$$C = \left\{\frac{\pi}{2} - \alpha + n\pi \;\mid\; n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Definimos α como el ángulo que cumple que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{3}{5}$ y $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$.

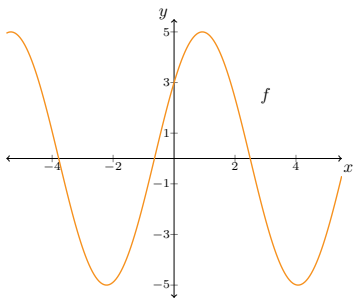


Figura 3.3: Ecuación $y = 4\operatorname{sen} x + 3\cos x$.

Por otra parte,
$\cos(x+\alpha) \geq 0$ si solo si $x+\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, con $k \in \mathbb{Z}$; y
$\cos(x+\alpha) \leq 0$ si solo si $x+\alpha \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, con $k \in \mathbb{Z}$.
En resumen tendremos que:

- $f'(x) \geq 0$ si solo si $x \in \left[-\alpha + \frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi, -\alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, con $k \in \mathbb{Z}$.
  En estos intervalos f es creciente.
- $f'(x) \leq 0$ si solo si $x \in \left[-\alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\alpha + \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right]$, con $k \in \mathbb{Z}$.
  En estos intervalos f es decreciente.
- f alcanzará máximos locales en los puntos críticos $-\alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ y mínimos locales en los puntos críticos $-\alpha + \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Por la periodicidad de f, estos extremos locales son también globales. Así

$$\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f\left(-\alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -5,$$
$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f\left(-\alpha + \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right) = 5,$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

2. Halle los extremos absolutos de f en el intervalo I:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$; $I = [-1, 4[$.

Solución. Como f es un polinomio, es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1).$$

Luego $f'(x) = 0$ si solo si $x \in \left\{\frac{1}{3}, 1\right\} \subset I$ por lo que los puntos críticos en I son $\frac{1}{3}$ y 1.
Busquemos los intervalos de monotonía de f, para lo cual analizaremos el signo de f'.
El análisis se lo ilustra en la siguiente tabla:

x	-1		$\frac{1}{3}$		1		4
$3x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Esquema		↗	Máx loc	↘	Mín loc	↗	

Se puede observar que:

- La función f es creciente en $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ y que

$$f\left(\left[-1, \frac{1}{3}\right]\right) = \left[f(-1), f\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \left[-4, \frac{4}{27}\right].$$

- f es decreciente en $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$, y

$$f\left(\left[\frac{1}{3}, 1\right]\right) = \left[f(1), f\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \left[0, \frac{4}{27}\right].$$

- f es creciente en $[1, 4[$ y, además

$$\begin{aligned} f([1,4[) &= [f(1), \lim_{x\to 4^-} f(x)[, \\ &= [f(1), f(4)[, \\ &= [0, 36[. \end{aligned}$$

- Teniendo en cuenta lo anterior, concluimos que:

$$\begin{aligned} f([-1,4[) &= f\left(\left[-1, \frac{1}{3}\right]\right) \bigcup f\left(\left[\frac{1}{3}, 1\right]\right) \bigcup f([1,4[) \\ &= \left[-4, \frac{4}{27}\right] \bigcup \left[0, \frac{4}{27}\right] \bigcup [0, 36[\\ &= [-4, 36[, \end{aligned}$$

es decir que la imagen de f es $f(I) = [-4, 36[$ y además:

$$\begin{aligned} \min_{x\in I} f(x) &= f(-1) = -4, \\ \sup_{x\in I} f(x) &= 36, \end{aligned}$$

y no existe $\max_{x\in I} f(x)$.

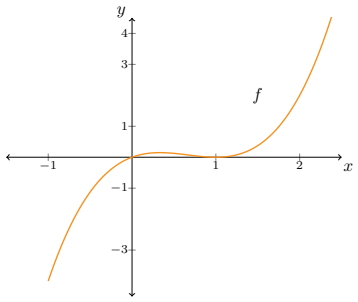


Figura 3.4: Ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$.

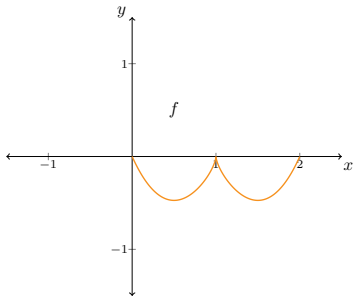


Figura 3.5: Ecuación $y = (x-1)^{\frac{2}{3}}x^3 - 2x^2 + x$.

b) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x^2-2x)$; $I = [0,2]$.

Solución. Al ser f continua en el intervalo cerrado y acotado $[0,2]$, existen los extremos absolutos y solo podrán ser alcanzados en 0, 2 o en un punto crítico. Encontremos los puntos críticos calculando la derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x^2-2x) + (x-1)^{\frac{2}{3}}(2x-2) \\ &= \frac{2}{3}\frac{x^2-2x+3(x-1)^2}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{2}{3}\frac{4x^2-8x+3}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}, \\ &= \frac{2}{3}\frac{4(x-1)^2-1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

Vemos que no existe $f'(1)$ y que $f'(x) = 0$ si solo si $4x^2 - 8x + 3 = 0$; es decir si $x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$. Por lo tanto concluimos que los puntos críticos son 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$.

Calculemos los valores de f en los extremos de I y en los puntos críticos:

x	$f(x)$
2	0
$\frac{3}{2}$	≈ -0.47
1	0
$\frac{1}{2}$	≈ -0.47
0	0

De la tabla de valores se deduce que:

$$\max_{x\in[0,2]} f(x) = f(0) = f(1) = f(2) = 0,$$

$$\min_{x\in[0,2]} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}} \approx -0.47.$$

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+4}$; $I = \left[\dfrac{5}{4}, 5\right]$.

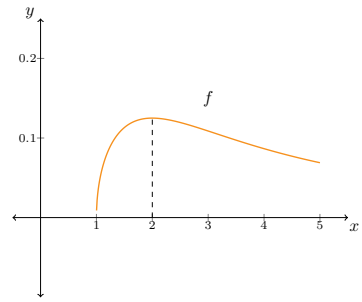


Figura 3.6: Ecuación $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+4}$.

Solución. Como f es continua en el intervalo cerrado y acotado I, existen sus extremos absolutos en I y pueden ser alcanzados en $\frac{5}{4}$, en 5 o en un punto crítico ubicado en $\left]\frac{5}{4}, 5\right[$. Para encontrar los puntos críticos calculemos la derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(x^2+4) - \sqrt{x-1}(2x)}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{-3x^2+4x+4}{2\sqrt{x-1}(x^2+4)^2} \\ &= -\frac{(3x^2+2)(x-2)}{2\sqrt{x-1}(x^2+4)^2}. \end{aligned}$$

Vemos que f es derivable en $]1, +\infty[$ y que $f'(x) = 0$ si solo si

$$(3x^2+2)(x-2) = 0,$$

por lo que $x = 2$. Es decir que al interior de I solo existe un punto crítico, que es 2.

Calculemos los valores de f en $\frac{5}{4}$ y 5 (los extremos de I) y en 2, que es el único punto crítico de f situado al interior de I:

De la tabla de valores de f se deduce que:

$$\max_{x\in I} f(x) = f(2) = \frac{1}{8},$$
$$\min_{x\in I} f(x) = f(5) = \frac{2}{29}.$$

x	$f(x)$
5	$\frac{2}{29} \approx 0.070$
2	$\frac{1}{8} = 0.125$
$\frac{5}{4}$	$\frac{8}{89} \approx 0.090$

4. Halle los valores críticos y los extremos absolutos y relativos de la función f en el intervalo I:

a)
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad -2 \le x < 1, \\ x^2+2 & \text{si} \quad 1 \le x \le 3; \end{cases} \quad I = [-2,3].$$

Solución. Al ser f continua en 1 y como

$$f|_{[-2,1]}(x) = 2x+1 \qquad \text{y} \qquad f|_{[1,3]}(x) = x^2+2,$$

tenemos que:

$$f'_-(1) = (2x+1)'|_{x=1} = 2,$$
$$f'_+(1) = (x^2+1)'|_{x=1} = 2x|_{x=1} = 2.$$

Por lo cual $f'(1) = 2$. La función f es derivable en $]-2,3[$.
Los posibles puntos críticos son entonces los puntos donde la derivada se anula, lo que no sucede dado que:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -2 < x < 1; \\ 2x & \text{si} \quad 1 \le x < 3. \end{cases}$$

No existen entonces puntos críticos y tampoco extremos en $]-2,3[$. Y para todo $x \in]-2,3[$ $f'(x) > 0$, por lo que f es creciente en $[-2,3]$.
Los extremos absolutos se obtienen evaluando la función en -2 y 3:

$$\min_{x\in I} f(x) = f(-2) = (2x+1)|_{x=-2} = -3,$$
$$\max_{x\in I} f(x) = f(3) = (x^2+2)|_{x=3} = 11.$$

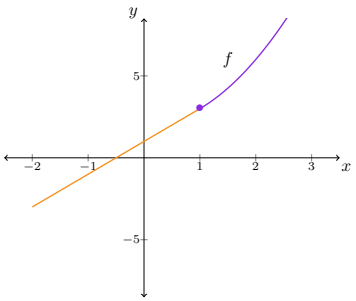


Figura 3.7: Función f de ecuación: $y = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad -2 \le x < 1, \\ x^2+2 & \text{si} \quad 1 \le x \le 3. \end{cases}$

b) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $I = [-L,L]$ con $L > 0$, y si $ad \neq bc$ o si $ad = bc$.

Solución. Si $ad = bc$, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si} \quad x \neq -\dfrac{d}{c} \text{ y } c \neq 0, \text{ o si } c = 0, \\ \nexists & \text{si} \quad x \neq -\dfrac{d}{c} \text{ y } c \neq 0. \end{cases}$$

Este caso es entonces trivial, pues f es constante en I o en $I \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$, si $c \neq 0$.

Caso $ad \neq bc$: $D(f) = I \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ y f será discontinua en $-\frac{d}{c}$ si $-\frac{d}{c} \in I$. Además

$$\lim_{x \to -\frac{d}{c}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{d}{c}^+} f(x) = +\infty \text{ o } -\infty,$$

y

$$f'(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} \neq 0,$$

para todo $x \neq -\frac{d}{c}$.
Por ello:

i) Si $-\frac{d}{c} \notin [-L, L]$, f será continua y monótona en I y alcanzará sus extremos absolutos en $-L$ y en L.

ii) Si $-\frac{d}{c} = -L$, f será monótona en $]-L, L]$ y alcanzará en L un extremo absoluto (máximo, si $ad - cb > 0$ o mínimo si $ad - cb < 0$).

iii) Si $-\frac{d}{c} \in]-L, L[$, f es no acotada por arriba y por abajo, por lo que no tiene extremos absolutos.
Si $ad - cb > 0$, f es creciente en $[-L, L] \setminus \left\{\frac{d}{c}\right\}$ y alcanza un mínimo local en $-L$ y un máximo local en L.
Si $ad - cb < 0$, f es decreciente en $[-L, L] \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ y alcanza un máximo local en $-L$ y un mínimo local en L.

iv) Si $-\frac{d}{c} = L$, f será monótona en $[-L, L[$ y alcanzará en $-L$ un extremo absoluto (mínimo, si $ad - cb > 0$ o máximo si $ad - cb < 0$).

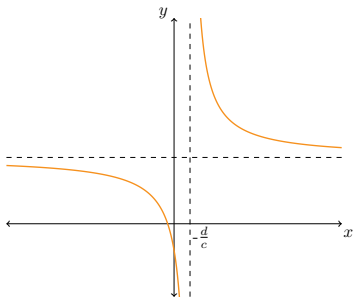


Figura 3.9: Ecuación $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, para $ad \neq cd$.

Ejercicios Propuestos

1. Para cada función f, halle los puntos críticos y los intervalos de monotonía. Distinga los puntos críticos que son extremos locales.

   a) $f(x) = \frac{8}{x^2 - 16}$.

   b) $f(x) = x^4 - 2x^3$.

   c) $f(x) = \frac{x^3 - 16}{x}$.

   d) $f(x) = x^3(x-7)^4$.

   e) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$.

   f) $f(x) = \frac{1}{1 - \cos x}$.

3.2 Teoremas del valor intermedio

Teorema 23: Teorema de Rolle

Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un número $c \in (a,b)$ tal que:

$$f(a) = f(b).$$

Entonces, existe un número $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema 24: Teorema del valor intermedio o de los incrementos finitos

Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un número $c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

o también:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Corolario 3:

Si f está definida en un intervalo $[a,b]$, es derivable en su interior $]a,b[$ y su derivada es igual a 0 en todo punto de éste, entonces f es constante en $[a,b]$.

Teorema 25: Teorema general del valor intermedio

Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y derivables en (a,b). Supongamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ y que $g(a) \neq g(b)$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ejercicios

1. Verifique si en el intervalo I se puede aplicar el teorema de Rolle para la función f dada. De ser así, halle los valores de c, cuya existencia garantiza el teorema mencionado.

   a)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si} \quad -3 \leq x < 0, \\ -x^3 + 2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

   Solución. Si ponemos $g(x) = x^3 + 2$ y $h(x) = 2 - x^3$, se tiene que $f|_{[-3,0]} = g|_{[-3,0]}$ y $f|_{[0,3]} = h|_{[0,3]}$. Además no hay conflicto en 0 porque

$$f(0) = g(0) = h(0) = 2.$$

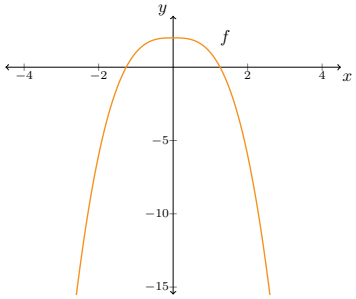


Figura 3.10: Función f de ecuación $y = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si} \quad -3 \leq x < 0, \\ -x^3 + 2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3; \end{cases}$ $I = [-3,3]$.

Como g y h son continuas por ser polinomios, tenemos entonces que f es continua en $[-3,3]$. Por el Corolario del Teorema de derivabilidad de funciones localmente iguales tenemos que f es derivable en $]-3,0[$ y $]0,3[$. Además tenemos que:

$$f'_-(0) = g'_-(0) = g'(0) = \left(3x^2\right)|_{x=0} = 0; \text{y}$$
$$f'_+(0) = h'_+(0) = h'(0) = \left(-3x^2\right)|_{x=0} = 0.$$

Es decir que $f'(0) = 0$.
f es derivable en $]-3,3[$ y

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad -3 < x \leq 0; \text{ y,} \\ -3x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

Pero $f(-3) = 29 \neq -25 = f(3)$, y por lo que no es aplicable el Teorema de Rolle.

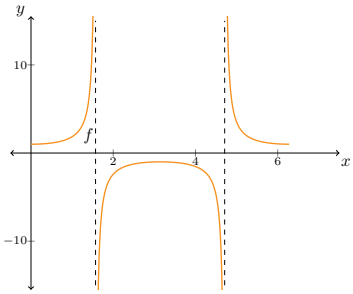


Figura 3.11: Ecuación $y = \sec(x)$.

b) $f(x) = \sec x$; $I = [0, 2\pi]$

Solución. f no está definida ni en $\dfrac{\pi}{2}$ ni en $\dfrac{3\pi}{2}$, por lo que no es continua en I y el teorema de Rolle no puede ser aplicado.

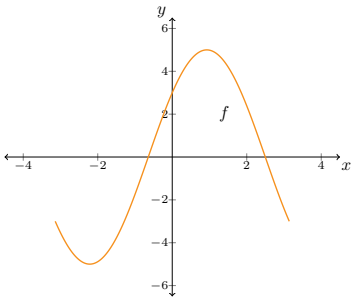


Figura 3.12: Ecuación $y = 4\,\text{sen}(x) + 3\cos(x)$ en el intervalo $I = [-\pi, \pi]$.

c) $f(x) = 4\,\text{sen}\,x + 3\cos x$; $I = [-\pi, \pi]$.

Solución. Como vimos en una sección precedente podemos escribir $f(x) = 5\,\text{sen}(x + \alpha)$ con $\alpha = \arcsin\dfrac{3}{5} = \arccos\dfrac{3}{4}$. La función f es continua en I y derivable en $]-\pi, \pi[$. Además $f'(x) = 5\cos(x + \alpha)$ y $f(-\pi) = f(\pi) = -3$.
Se puede entonces aplicar el Teorema de Rolle que garantiza que existe $c \in]-\pi, \pi[$ tal que $f'(c) = 0$. Tendremos que $f'(c) = 5\cos(c + \alpha) = 0$, por lo que

$$c + \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$ y $c \in]-\pi, \pi[$, de donde:

$$c \in \left\{-\alpha - \frac{\pi}{2}, -\alpha + \frac{\pi}{2}\right\},$$

puesto que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. Verifique si en el intervalo I la función f satisface las hipótesis del teorema del Valor Intermedio. De ser así, halle los valores de c cuya existencia nos es garantizada por dicho teorema.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si} \quad -3 \leq x < 0 \\ 2 - x^3 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3; \end{cases} \quad I = [-3, 3].$$

Solución. Es la misma función del ejercicio *a)* de la sección precedente, para la cual, verificamos que f es continua en $[-3,3]$, derivable en $]-3,3[$ y que:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad -3 < x < 0; \\ -3x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

El teorema del Valor Intermedio nos garantiza entonces que existe $c \in]-3,3[$ tal que:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} \\ &= \frac{-25 - 29}{6} \\ &= -9. \end{aligned}$$

Como $f'(c) \geq 0$ si $c \in]-3,0[$, necesariamente $c \in]0,3[$ y $f'(c) = -3c^2 = -9$, de donde $c = \sqrt{3}$.

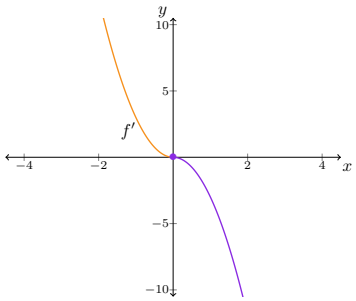


Figura 3.13: Función f' de ecuación: $y = \begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad -3 < x < 0; \\ -3x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 3. \end{cases}$

b) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$; $I = [-1,27]$.

Solución. Como f es derivable en $\mathbb{R}$, lo es evidentemente en $]-1,27[$ y es continua en $[-1,27]$. Se puede entonces aplicar el Teorema del Valor Intermedio. Es decir, existe $c \in]-1,27[$ tal que:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(27) - f(-1)}{27 - (-1)} \\ &= \frac{24 - (-2)}{28} \\ &= \frac{13}{14}. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$f'(c) = 1 - \frac{1}{3}c^{-\frac{2}{3}} = \frac{13}{14},$$

de donde $c = \left(\frac{14}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 10.08$.

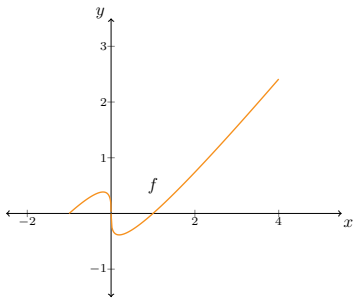


Figura 3.14: Ecuación $y = x - \sqrt[3]{x}$.

3. Mediante el teorema del valor intermedio, demuestre el siguiente teorema (de los incrementos finitos).
Sean I un intervalo abierto, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en I, $x_0 \in I$ y Δx tales que $x_0 + \Delta x \in I$. Entonces existe $\lambda \in]0,1[$ tal que

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \lambda \Delta x)\Delta x.$$

Solución. En el caso $\Delta x > 0$: Sea $x_1 = x_0 + \Delta x > x_0$, entonces $[x_0, x_1] \subset I$, por lo que f es continua en $[x_0, x_1]$ y derivable en $]x_0, x_1[$. Por el Teorema del Valor Intermedio, existe $c \in]x_0, x_1[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (3.1)$$

si ponemos $\lambda = \dfrac{c - x_0}{\Delta x}$, tendremos que $c = x_0 + \lambda \Delta x$ y $\lambda \in]0,1[$. De (3.1) obtenemos entonces que:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\Delta x = f'(x_0 + \lambda \Delta x)\,\Delta x.$$

El caso $\Delta x < 0$ es análogo.

4. Use el teorema de Rolle para probar que un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ y coeficientes reales tiene a lo sumo n raíces reales.

Demostración. Demostraremos que un polinomio de grado n posee a lo sumo n raíces reales, con inducción sobre el grado del polinomio. Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$P_n =$ "Un polinomio de grado n posee a lo sumo n raíces reales".

Hipótesis de inducción:Para $k = 1$, demostremos

$P_1 =$ "Un polinomio de grado 1 posee a lo sumo 1 raíz real".

Sea $f_1(x) = ax + b$, con $a \neq 0$. Entonces:

$$f_1(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Es decir que f tiene una sola raíz real, lo que prueba que P_1 es verdadera.

Hipótesis de inducción: Para $k = n$, suponemos que P_n es verdadera.

Es decir, es verdad que

$P_n =$ "Un polinomio de grado n posee a lo sumo n raíces reales".

Tesis de inducción: Para $k = n + 1$, demostremos que P_{n+1} es verdadero.

Sea $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_{n+1} x^{n+1}$, con $a_{n+1} \neq 0$. Por el absurdo, supongamos que f tiene $n + 2$ raíces distintas, digamos $x_0, x_1, \cdots x_{n+1}$ tales que $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_n < x_{n+1}$ y $f(x_n) = 0$ para todo $k \in \{0, 1, \cdots, n, n+1\}$.

Como f es derivable en $\mathbb{R}$, f es continua en $\mathbb{R}$, por lo que $\forall k \in \{1, 2, \cdots n+1\}$ f es continua en $[x_{k-1}, x_k]$, derivable en $]x_{k-1}, x_k[$ y $f(x_{k-1}) = f(x_k) = 0$.

Se puede entonces aplicar el Teorema de Rolle en cada intervalo, lo que garantiza que para todo $k \in \{1, 2, \cdots n, n+1\}$ existe $c_k \in]x_{k-1}, x_k[$ tal que $f'(c_k) = 0$.

Pero el polinomio f' tiene grado n, puesto que

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots n a_n x^{n-1} + (n+1) a_{n+1} x^n,$$

con $(n+1)a_{n+1} \neq 0$, y tendría $n + 1$ raíces distintas, lo que contradice la proposición P_n.

Esto prueba que P_{n+1} es verdadera, lo que concluye la demostración. □

Ejercicios Propuestos

Estos ejercicios se tomaron de los textos [1, 5, 9].

1. Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Probar que $f(1) = f(-1) = 0$, pero $f'(x)$ no es nunca cero en $[-1, +1]$. Explique por qué este resultado "contradice" el Teorema de Rolle.

2. Suponga que $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y que $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in [a, b]$. Demostrar que $f(x) = x$ para algún $x \in [a, b]$.

3. Sea $f(x) = (x^2 - 1)^2$ en $[-1, 1]$. Hallar el valor de c cuya existencia garantiza el teorema de Rolle.

4. Use el Teorema de Rolle para demostrar que el polinomio

$$x^3 - 12x + b,$$

no puede tener más de un cero en $[-2, 2]$ sin importar el valor de b.

3.3 Convexidad y puntos de inflexión

Definición 34: Funciones convexa y cóncava

Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función definida en I. La función f *es convexa* (respectivamente *cóncava) en* I si para cualquier $x_0 \in I$ y $x_1 \in I$ tales que $x_0 < x_1$, el gráfico de f correspondiente al intervalo (x_0, x_1); es decir, el conjunto de $\mathbb{R}^2$

$$\{(x, f(x)) : x \in (x_0, x_1)\}$$

queda por debajo (respectivamente por encima) del segmento de recta $[P_0, P_1]$, con $P_0(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$, donde $y_0 = f(x_0)$ y $y_1 = f(x_1)$.

Teorema 26: Criterio de la derivada para la convexidad

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si f' es creciente (respectivamente decreciente) en (a, b), entonces f es convexa (respectivamente cóncava) en $[a, b]$.

Teorema 27: Criterio de la segunda derivada para la convexidad

Si f es continua en $[a, b]$ y existe f'' y es positiva (respectivamente negativa) en (a, b), entonces f es convexa (respectivamente cóncava) en $[a, b]$.

Definición 35: Punto de inflexión

Sean $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Si f es convexa en $[a, x_0]$ y cóncava en $[x_0, b]$, o viceversa, se dice que el punto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ es un *punto de inflexión* del gráfico de f.

Teorema 28:

Si existe $f''(x_0)$ y si $P_0(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(x_0) = 0$.

Ejercicios

1. Utilice la segunda derivada de f para determinar los intervalos en los cuales f es cóncava, en cuales es convexa, así como los puntos de inflexión.

   a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + x$.

   Solución. Calculando la primera y segunda derivada de f tenemos que:

   $$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 1,$$

   y

   $$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}.$$

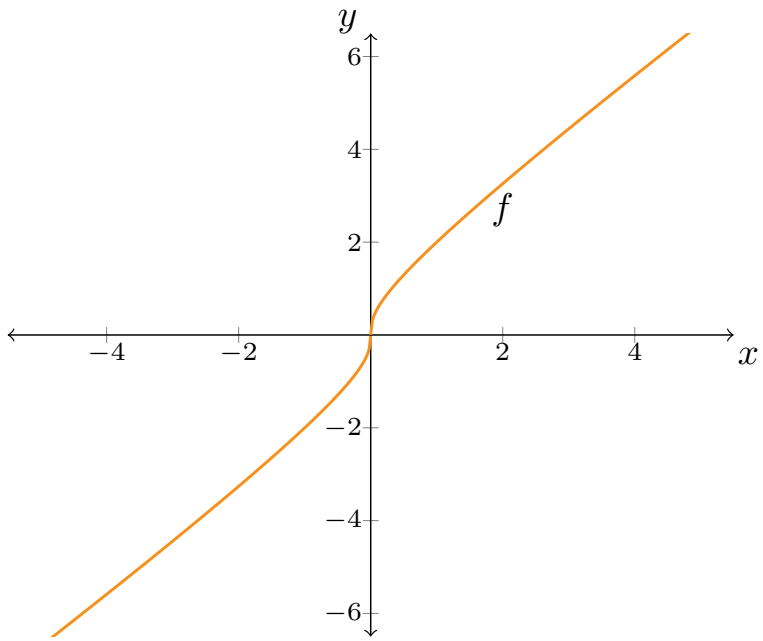


Figura 3.15: Función de ecuación $y = \sqrt[3]{x} + x$.

Vemos que f es continua en $\mathbb{R}$ pero no es derivable en 0. Por otra parte:

$$f''(x) > 0, \text{si} x \in]-\infty, 0[,$$
$$f''(x) < 0, \text{si} x \in]0, +\infty[.$$

Por lo tanto f es convexa en $]-\infty, 0[$, cóncava en $]0, +\infty[$ y $(0, 0)$ es un punto de inflexión.

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 26}$.

Solución. Calculando la primera y segunda derivadas de f tenemos que:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 26}},$$

y

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 26} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+26}}}{x^2 + 26},$$
$$= \frac{26}{(x^2 + 26)^{\frac{3}{2}}}.$$

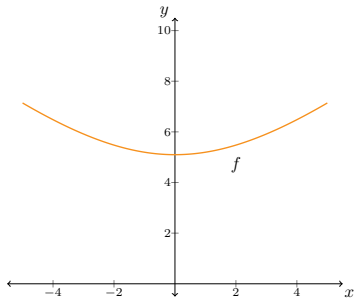


Figura 3.16: Ecuación $y = \sqrt{x^2 + 26}$.

Vemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$, por lo que f es convexa en $\mathbb{R}$ y no tiene puntos de inflexión.

c) $f(x) = x - \cos x + 1$.

Solución. Calculando la primera y segunda derivada tenemos que:

$$f'(x) = 1 + \operatorname{sen} x;$$

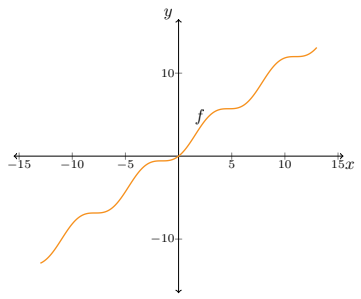


Figura 3.17: Ecuación $y = x - \cos(x) + 1$.

y

$$f''(x) = \cos x.$$

Además

$$f''(x) > 0, \text{ si } x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[=: I_k, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ y}$$
$$f''(x) < 0, \text{ si } x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[=: J_k, \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

tendremos entonces que f es convexa en I_k y cóncava en J_k para todo $k \in \mathbb{Z}$. Además $\frac{\pi}{2} + n\pi$ es punto de inflexión para todo $n \in \mathbb{Z}$.

2. Para la función f dada, utilice la segunda derivada para hallar los extremos locales y los puntos de inflexión. Dibuje, aproximadamente, el gráfico de la función f.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x.$

Solución. Calculando la primera y segunda derivadas tenemos que

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1);$$

y

$$f''(x) = 2(x-2),$$

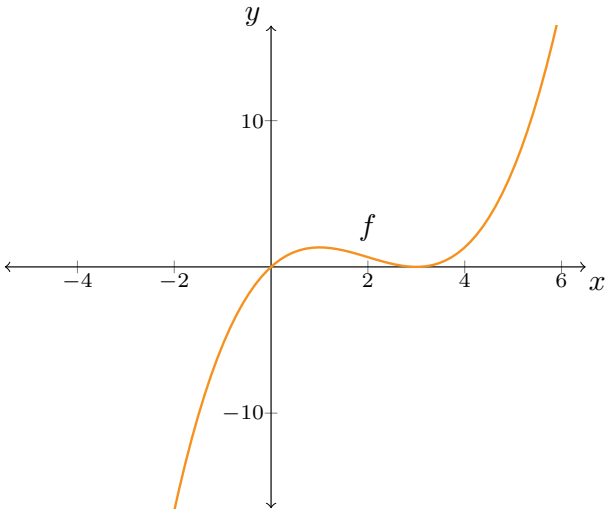
para todo $x \in \mathbb{R}$.
El análisis de los signos de f' y f'' se resume en la siguiente tabla:

x		1		2		3	
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
Esquema	↗	Max loc	↘	P. Infl	↘	Mín loc	↗

Figura 3.18: Ecuación $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$.

Para graficar la función calculamos una tabla de valores:

x	$f(x)$
4	$\frac{4}{3}$
3	0
2	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{4}{3}$
0	0



b) $f(x) = \dfrac{x^4+4}{x^2}$.

Solución. Observemos que f es par y por ello su gráfico es simétrico respecto al eje x. Calculamos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 8x^{-3} \\ &= 2\frac{x^4-4}{x^3} \\ &= \frac{2}{x^3}\left(x^2+2\right)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}); \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 + 24x^{-4} \\ &= 2\frac{x^4+12}{x^4}. \end{aligned}$$

El análisis de los signos de f' y f'' se resumen en la siguiente tabla:

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$
Esquema	$\searrow$	Mín loc	$\nearrow$		$\searrow$	Mín loc	$\nearrow$

Para graficar la función realizamos una tabla de valores:

x	$f(x)$
3	$\frac{85}{9}$
2	5
$\sqrt{2}$	4
1	5
0	$\nexists$
-1	5
$-\sqrt{2}$	4
-2	5
-3	$\frac{85}{9}$

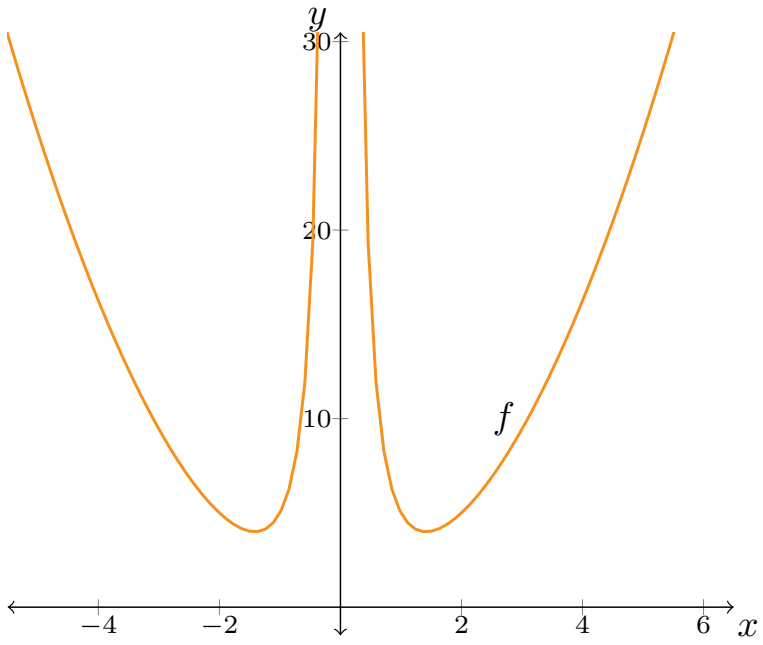


Figura 3.19: Ecuación $y = \dfrac{x^4+4}{x^2}$.

c) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$.

Solución. Vemos que f es impar, por lo que su gráfico es simétrico respecto al origen, y es periódica con período $\frac{2\pi}{3}$.
Además tenemos que

$$f'(x) = 3\cos(3x)$$

y

$$f''(x) = -9\operatorname{sen}(3x),$$

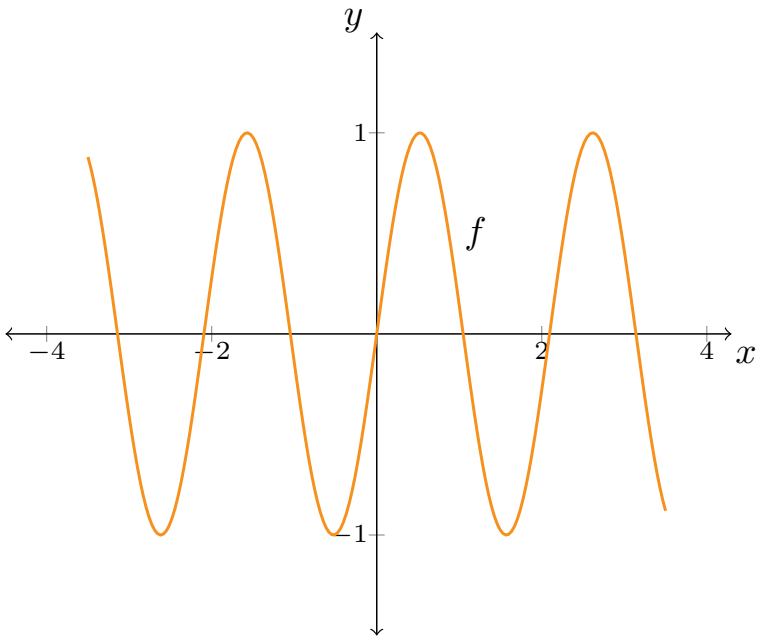
para todo $x \in \mathbb{R}$.
Para el análisis de los signos de f' y f'' basta considerar el intervalo $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ por la periodicidad de la función f y dado que es impar.
Resumimos estos valores en la siguiente tabla:

x	$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
Esquema	P. Infl.	↘	Mín loc	↗	P. Infl.	↗	Máx loc	↘	P. Infl.

Figura 3.20: Ecuación $y = \operatorname{sen}(3x)$.

Para graficar la función calculamos una tabla de valores:

x	$f(x)$
$\frac{\pi}{3}$	0
$\frac{\pi}{6}$	1
0	0
$-\frac{\pi}{6}$	-1
$-\frac{\pi}{3}$	0



3. Dibuje, aproximadamente, el gráfico de f, si

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| =: |g(x)| & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 =: h(x) & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Solución. Como g y h son continuas en $\mathbb{R}$, f es continua $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Como $|g|$ es dos veces derivable en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ y h lo es en $\mathbb{R}$, entonces f es dos veces derivable en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ y además:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1) & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x+1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ h(x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < -1 \\ 1 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 4x - 5 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

y,

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 1[\setminus \{-1\} \\ 4 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Observemos que f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ y discontinua en 1.
Además $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} h(x) = h(1) = 0$.
El análisis de los signos de f' y f'' se resume en la siguiente tabla:

x		-1		1		$\frac{5}{4}$	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	0	$\nexists$	0	$\nexists$	$+$	$+$	$+$
Esquema	$\searrow$	Mín loc	$\nearrow$		$\searrow$	Mín loc	$\nearrow$

Para graficar la función calculamos una tabla de valores de f:

x	$f(x)$
2	1
$\frac{3}{2}$	0
$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{8}$
1^+	0
1^-	2
0	1
-1	0
-2	1
-3	2

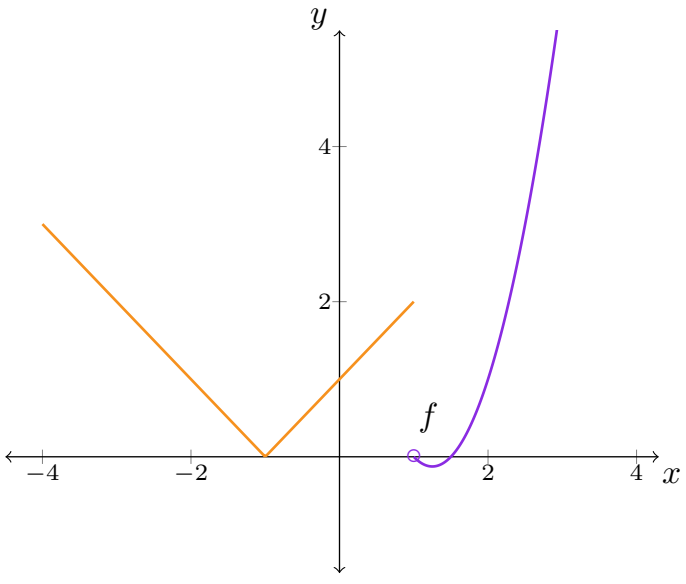


Figura 3.21: Función f de ecuación:

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

4. Dibuje aproximadamente el gráfico de la función f que tenga las propiedades dadas:

   - f'' es continua, $f'(-2) = f'(-1) = f'(1) = f'(3) = 0$;
   - $f''(x) > 0$ para todo $x < -\frac{3}{2}$ o $0 < x < 2$; y,
   - $f''(x) < 0$ para todo $-\frac{3}{2} < x < 0$ o $x > 2$; y,
   - $f(0) = 0$.

   Solución. Resumimos y completamos la información en la siguiente tabla:

x		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		0		1		2		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
Esquema	$\searrow$	Mín loc	$\nearrow$	P. Infl.	$\nearrow$	Máx loc	$\searrow$	P. Infl.	$\searrow$	Mín loc	$\nearrow$	P. Infl.	$\nearrow$	Máx loc	$\searrow$

   Hemos completado la información con base en los siguientes criterios:

   - Al ser f'' continua, como cambia su signo en $-\frac{3}{2}$, 0 y 2, se debe tener que $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = f''(0) = f''(2) = 0$ y estos tres puntos serán puntos de inflexión.
   - Al existir f'', f' es continua.
   - Como $f'' > 0$ en $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\bigcup]0, 2[$, f' es creciente en estos intervalos y como $f'(-2) = f'(2) = 0$, en estos puntos f' debe cambiar de signo, de negativo a positivo, y f debe alcanzar en ellos un mínimo local.
   - Como $f'' < 0$ en $\left]-\frac{3}{2}, 0\right[\bigcup]2, +\infty[$, f' es decreciente en estos intervalos y como $f'(-1) = f'(3) = 0$, en estos puntos f' debe cambiar de signo, de positivo a negativo, y f debe alcanzar en ellos un máximo local.
   - Como $f' < 0$ en $]-1, 0[\cup]0, 1[$, f es decreciente en estos intervalos; y como $f(0) = 0$, f cambia de signo en 0, de positivo a negativo.

     Con estos criterios y con la información que consta en la tabla se bosqueja el siguiente gráfico:

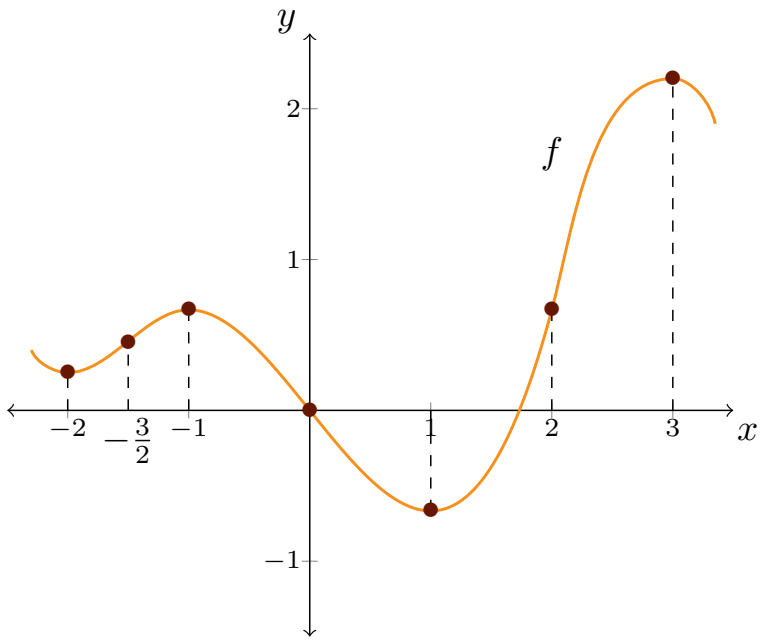


Figura 3.22: Función f con las propiedades descritas en el ejercicio 3.

Ejercicios Propuestos

Para la función f dada, utilice la segunda derivada para hallar los extremos locales y los puntos de inflexión. Dibuje aproximadamente el gráfico de f.

1. $f(x) = x^4 - 2x^3$.
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$.
3. $f(x) = 3x^5 - 10x^3$.
4. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$.
5. $f(x) = \dfrac{|x^2 - x + 12|}{|x+1|}$

3·4 Graficación de Funciones

Ejercicios

1. Dibuje, aproximadamente, el gráfico de la función f dada.

   a) $f(x) = (x+2)^3(x-1)^2$.

   Solución. Dado que f es un polinomio su dominio es $\mathbb{R}$ y su primera y segunda derivada son:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x+2)^2(x-1)^2 + 2(x+2)^3(x-1) \\ &= (x+2)^2(x-1)(5x+1) \\ &= (x+2)^2\left(5x^2-4x-1\right), \end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(x+2)\left(5x^2-4x-1\right) + (x+2)^2(10x-4) \\ &= (x+2)\left(20x^2+8x-10\right) \\ &= 2(x+2)\left(10x^2+4x-5\right) \\ &= 20(x+2)(x-x_1)(x-x_2), \end{aligned}$$

   con $x_1 = -\dfrac{2+3\sqrt{6}}{10} \approx -0.93$ y $x_2 = \dfrac{3\sqrt{6}-2}{10} \approx 0.53$.
   El análisis de los signos de f' y f'' se resume en la siguiente tabla:

x		-2		$x_1 \approx -0.93$		$-\frac{1}{5}$		$x_2 \approx 0.53$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Esquema	↗	P. Infl.	↗	P. Infl.	↗	Máx loc	↘	P. Infl.	↘	Mín loc	↗

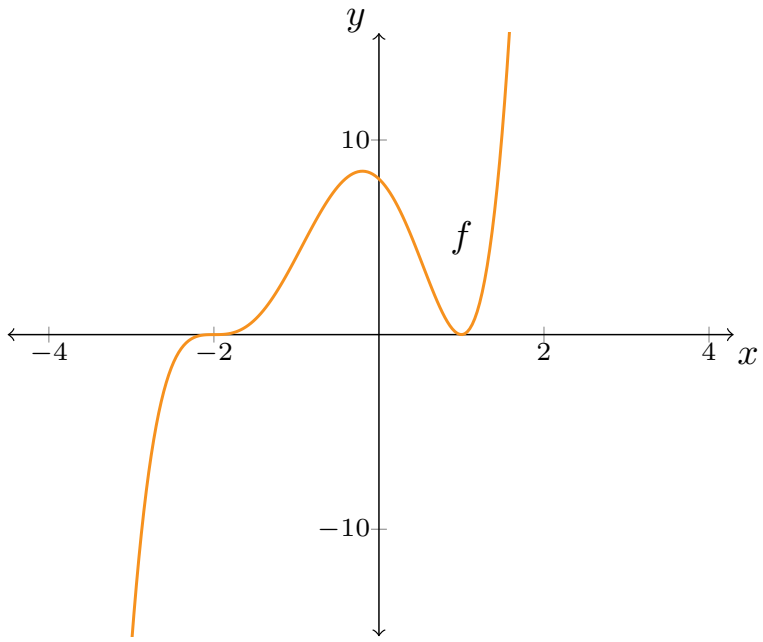


Figura 3.23: Ecuación $y = (x+2)^3(x-1)^2$.

Para graficar la función hacemos una tabla de valores:

x	$f(x) \approx$
1.5	10.72
1.25	2.15
1	0
x_2	3.52
0	8
−0.2	8.4
x_1	4.52
−1	4
−2	0
−2.25	−0.17
−2.5	−1.53
−2.75	−5.93

b) $f(x) = x^2 \ln x$.

Solución. Calculando la primera y segunda derivada tenemos que:

$$f'(x) = x(2\ln x + 1),$$

y

$$f''(x) = 2\ln x + 3.$$

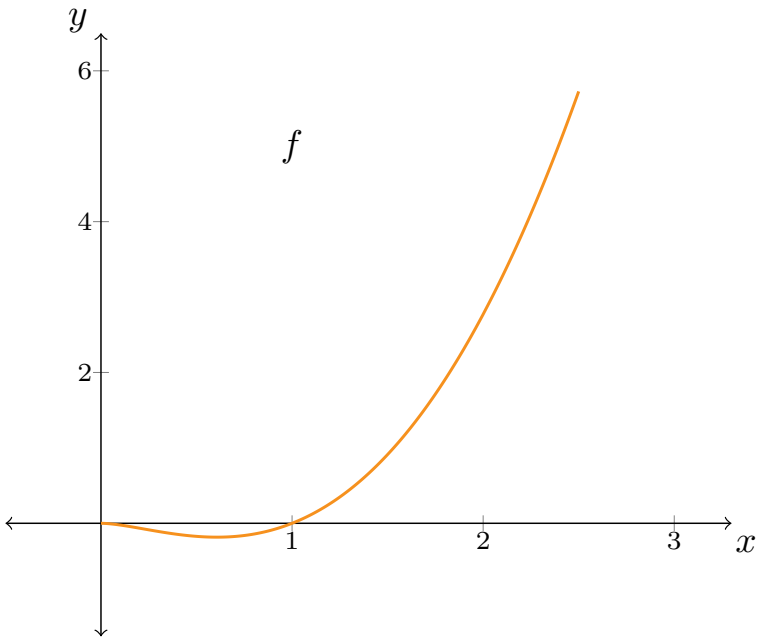
Si analizamos la primera derivada de f sabemos que si $x_1 = e^{-\frac{1}{2}}$, $f'(x_1) = 0$; y además, si $x_2 = e^{-\frac{3}{2}}$, $f''(x_2) = 0$; $x_1 \approx 0.61$; $x_2 \approx 0.22$.
Además, vemos que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$.
El análisis de los signos de f' y f'' es el siguiente:

x	0		x_2		x_1	
$f'(x)$	$\nexists$	−	−	−	0	+
$f''(x)$	$\nexists$	−	0	+	+	+
Esquema		↘	P. Infl.	↘	Mín loc	↗

Figura 3.24: Ecuación $y = x^2 \ln(x)$.

Para graficar la función calculamos una tabla de valores:

x	$f(x) \approx$
1.4	0.66
1.2	0.26
1.0	0
0.8	−0.14
$x_1 \approx 0.61$	−0.18
0.4	−0.15
$x_2 \approx 0.22$	−0.07
0.1	−0.02
0^+	0^-



c)

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 5x + 4| & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Solución. La función f se puede reescribir como:

$$f(x) = \begin{cases} |(x-4)(x-1)| & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Analizando los signos de la función g dada por $g(x) = (x - 4)(x - 1)$ para $x \geq 0$, vemos que f se puede escribir como una función en tres partes:

$$f(x) = \begin{cases} (x-4)(x-1) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ o } 4 \leq x \\ -(x-4)(x-1) & \text{si} \quad 1 < x < 4 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Por lo que su primera derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \text{ o } 4 < x \\ -2x + 5 & \text{si} \quad 1 < x < 4 \\ -2x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

de lo que $x = \dfrac{5}{2} \in]1, 4[$ es punto crítico de f, además en los puntos $x = 0$ y $x = 4$ la derivada no existe por lo cual también son puntos críticos. Calculando la segunda derivada obtenemos:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \text{ o } 4 < x \\ -2 & \text{si} \quad 1 < x < 4 \\ -2 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

El análisis de los signos de f' y f'' es el siguiente:

x		0		1		$\frac{5}{2}$		4	
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
$f''(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$+$
Esquema	$\nearrow$	Máx loc	$\searrow$	Mín loc	$\nearrow$	Máx loc	$\searrow$	Mín loc	$\nearrow$

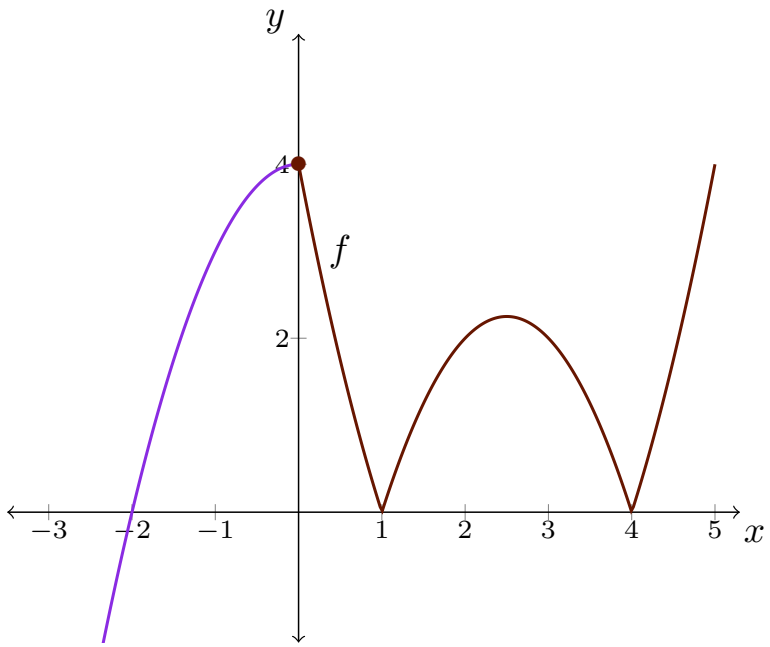


Figura 3.25: Función f de ecuación

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 5x + 4| & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Para graficar la función calculamos una tabla de valores:

x	$f(x)$
5	4
4	0
3	2
$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	2
1	0
0	4
-1	3
-2	0
$-\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{4}$

Ejercicios Propuestos

Dibuje, aproximadamente el gráfico la función f dada.

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

b) $f(x) = x - 3x^{1/3}$.

c) $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$.

d) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$.

e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$.

3·5 Problemas de extremos

Definición 36: Problema básico de optimización

Dados I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ continua en I, se debe determinar si existen el máximo y el mínimo de f en I. De existir, se debe hallar $x_m \in I$ y $x_M \in I$ tales que

$$\underline{y} = f(x_m) = \min_{x\in I} f(x) \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = f(x_M) = \max_{x\in I} f(x).$$

Teorema 29:

Sean I un intervalo y $\overline{x} \in I^\circ$ tal que f alcanza un extremo local en $\overline{x}$. Entonces $\overline{x}$ es un punto crítico de f; es decir, $f'(\overline{x}) = 0$ o no existe la derivada de f en $\overline{x}$.

Teorema 30:

Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Si existe un único extremo local en I, entonces este extremo es también global.

Teorema 31:

Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I. Entonces la imagen de f, el conjunto $\mathrm{Im}(f)$ es un intervalo. En particular, si $I = [a, b]$, entonces $\mathrm{Im}(f) = [f(x_m), f(x_M)]$.

Teorema 32:

Si $I = \bigcup_{k=1}^{n} A_n$ y $f : I \to \mathbb{R}$, entonces:

$$\mathrm{Im}(f) = \bigcup_{k=1}^{n} f(A_k).$$

Teorema 33:

Sean $I =]a, b[$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I. Entonces:

1. Si f es creciente en I, entonces $\mathrm{Im}(f) = \left]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$.
2. Si f es decreciente en I, entonces $\mathrm{Im}(f) = \left]\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$.
3. Resultados análogos a los anteriores son verdaderos si I es uno de los siguientes intervalos: $]-\infty, b[$, $]a, \infty[$ y $]-\infty, \infty[$.

Ejercicios

1. Resuelva el problema básico de optimización para las siguientes funciones f definidas en el intervalo I. Adicionalmente, determine el conjunto $\text{Im}(f)$.

   a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$, $I =]0,5]$

   Solución. Determinaremos $\text{Im}(f)$ para lo cual calculamos la primera y segunda derivada

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 30x + 24 \\ &= 6(x^2 - 5x + 4) \\ &= 6(x-1)(x-4), \end{aligned}$$

   y

   $$f''(x) = 12x - 30 = 6(2x - 5).$$

   Vemos que los puntos críticos son $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$; y que $x_3 = \dfrac{5}{2}$ es un punto de inflexión.
   El análisis de los signos de f' y f'' es el siguiente:

x	0		1		$\frac{5}{2}$		4		5
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
Esquema		$\nearrow$	Máx loc	$\searrow$	P.Infl	$\searrow$	Mín loc	$\nearrow$	Máx loc

   Como f es derivable es $\mathbb{R}$, lo es también en $]0,5[$ y derivable en 5 por la izquierda. Además:

   $$\begin{aligned} f(]0,1[) &= \left]\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] =]0,11] \\ f([1,4]) &= [f(4), f(1)] = [-16, 11] \\ f([4,5]) &= [f(4), f(5)] = [-16, -5]. \end{aligned}$$

   Por lo que

   $$f(]0,5]) = f(]0,1]) \bigcup f([1,4]) \bigcup f([4,5]) = [-16, 11].$$

   Por consiguiente

   $$\max_{x\in]0,5]} f(x) = f(1) = 11;$$

   y

   $$\min_{x\in]0,5]} f(x) = f(4) = -16.$$

Tabla de valores para f:

x	$f(x)$
5	-5
4	-16
3	-9
2	4
1	11
0	0

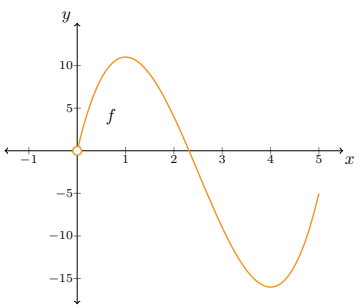


Figura 3.26: Ecuación $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x$.

Entonces la imagen de f es:

$$\mathrm{Im}(f) = f(]0,5]) = [-16,11].$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+25}}$, $I = \mathbb{R}$.

Solución. Calculando la primera y segunda derivada tenemos que:

$$f'(x) = -\frac{x}{(x^2+25)^{\frac{3}{2}}},$$

y

$$f''(x) = \frac{2x^2-25}{(x^2+25)^{\frac{5}{2}}}.$$

Observamos que f es par, por lo que basta resolver el problema en $[0,+\infty[$, ya que en este caso $\mathrm{Im}(f) = f([0,+\infty[)$. El análisis de signos de f' y f'' se presenta a continuación:

x	0		$\dfrac{5}{\sqrt{2}}$	
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
Esquema	Máx loc	$\searrow$	P. Infl.	$\searrow$

En la tabla notamos que f' es negativa en $[0,\infty[$ por lo que f es decreciente en $[0,\infty[$ y sabiendo además que:

$$f\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}; \text{y,}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

tenemos que:

$$f\left(\left[0,\frac{5}{\sqrt{2}}\right]\right) = \left[f\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right), f(0)\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{5}\right]; \text{y,}$$
$$f\left(\left[\frac{5}{\sqrt{2}},+\infty\right]\right) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\right] = \left]0, \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}\right].$$

Por lo que

$$\mathrm{Im}(f) = f([0,+\infty]) = \left]0,\frac{1}{5}\right];$$
$$\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(0) = \frac{1}{5};$$

no existe el mínimo de la función f y su ínfimo es:

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0.$$

extendiendo para los reales tenemos que $\mathrm{Im}(f) = \left]0,\frac{1}{5}\right[$ y su gráfico se representa en la figura 3.27.

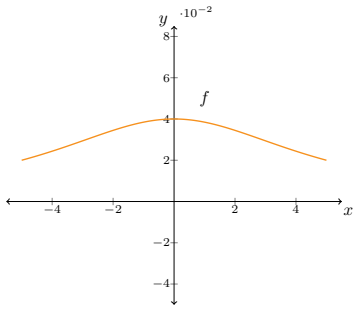


Figura 3.27: Función f de ecuación $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+25}}$.

c) $f(x) = x^4 + 6x^2 - 7$, $I =]-3, 1]$

Solución. Calculemos la primera y segunda derivadas:

$$f'(x) = 4x^3 + 12x = 4x(x^2 + 3);$$
$$f''(x) = 12x^2 + 12 = 12(x^2 + 1).$$

Por lo que $x_1 = 0$ es punto crítico de f y no hay puntos de inflexión. A continuación se muestra el análisis de signos de f' y f'' :

x	-3		0		1
$f'(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	$+$
Esquema		$\searrow$	Mín loc	$\nearrow$	Máx loc

Además tenemos que:

$$f(x) = (x^2 + 7)(x + 1)(x - 1).$$

Evaluamos f en los puntos de interés:

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = 128;$$
$$f(0) = -7;$$
$$f(1) = 0 = f(-1).$$

Dado que f es decreciente en $]-3, 0[$ y creciente en $[0, 1]$ tenemos:

$$f(]-3, 0]) = \left[f(0), \lim_{x \to -3^+} f(x) \right[= [-7, 128[;$$
$$f([0, 1]) = [f(0), f(1)[= [-7, 0].$$

Por lo cual:

$$\text{Im}(f) = f(I) = f(]-3, 0]) \bigcup f([0, 1]) = [-7, 128[;$$
$$\min_{x \in I} f(x) = f(0) = -7.$$

Y aunque el $\max_{x \in I} f(x)$ no existe, podemos decir que $\sup_{x \in I} f(x) = 128$.

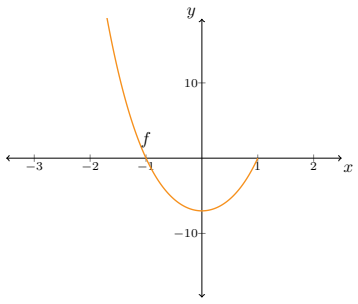


Figura 3.28: Ecuación $y = x^4 + 6x^2 - 7$.

d)

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ \text{sen}(\pi x) & \text{caso contrario.} \end{cases} \qquad I = \mathbb{R}.$$

Solución. Sean $g(x) = x - x^2$, $h(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$. Como h es periódica, de periodo 2, basta resolver el problema básico de optimización en $J = [0,3]$, ya que $\operatorname{Im}(f) = f(J)$. Determinamos $f(J)$:

$$f|_{[0,1]} = g|_{[0,1]},$$

y

$$f|_{]1,3]} = h|_{]1,3]}$$

$$f(0) = g(0) = h_-(0) = \lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0;$$
$$f(1) = g(1) = h_+(1) = \lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0;$$

por lo que f es continua en 0 y 1 y por ende en $\mathbb{R}$ y $f|_{[1,3]} = h|_{[1,3]}$.
Se puede aplicar el corolario del Teorema de derivabilidad de funciones localmente iguales:

$$f'_-(1) = g'_-(1) = g'(1) = (1-2x)|_{x=1} = -1;$$
$$f'_+(1) = h'_+(1) = h'(1) = \pi\cos(\pi x)|_{x=1} = -\pi.$$

Por consiguiente no existe $f'(1)$. Calculando la primera y segunda derivada de f tenemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ \nexists & \text{si} \quad x = 1, \\ \pi\cos(\pi x) & \text{si} \quad 1 < x < 3; \end{cases}$$

y

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ \nexists & \text{si} \quad x = 1, \\ -\pi^2\operatorname{sen}(\pi x) & \text{si} \quad 1 < x < 3. \end{cases}$$

El análisis de signos de f' y f'' se resume en la siguiente tabla:

x	0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{5}{2}$		3
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
Esquema		$\nearrow$	Máx loc	$\searrow$		$\searrow$	Mín loc	$\nearrow$	P. Infl	$\nearrow$	Máx loc	$\searrow$	

Además tenemos que:

$$f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = \left[g(0), g\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[0,\frac{1}{4}\right];$$
$$f\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right) = \left[g(1), g\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[0,\frac{1}{4}\right];$$
$$f\left(\left[1,\frac{3}{2}\right]\right) = \left[h\left(\frac{3}{2}\right), h(1)\right] = [-1,0];$$
$$f\left(\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]\right) = \left[h\left(\frac{3}{2}\right), h\left(\frac{5}{2}\right)\right] = [-1,1]; \text{y,}$$
$$f\left(\left[\frac{5}{2},3\right]\right) = \left[h(3), h\left(\frac{5}{2}\right)\right] = [0,1].$$

Por lo que

$$\mathrm{Im}(f) = f([0,3]) = \left[0, \frac{1}{4}\right] \bigcup [-1,0] \bigcup [-1,1] \bigcup [0,1] = [-1,1].$$

Finalmente,

$$\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{1}{2} \pm 2k\right) = 1, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f\left(-\frac{1}{2} \pm 2k\right) = -1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

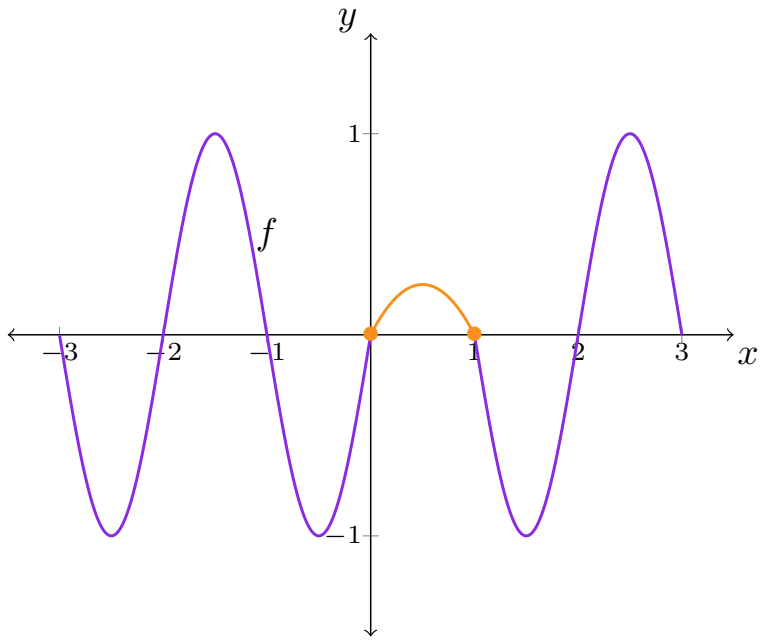


Figura 3.29: Función f de ecuación

$$y = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ \operatorname{sen}(\pi x) & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

2. Halle dos números no negativos tales que:

   a) Su suma es igual a 100 y el producto del cuadrado del primero y el cubo del segundo sea máximo.

   Solución. Sean $x, y \in [0, +\infty[$ los dos números buscados. Como $x + y = 100$, se tiene que

   $$y = 100 - x.$$

   Como tienen que ser no negativos, $x \ge 0$ y $100 - x \ge 0$, por lo que $x \in [0, 100]$.

   Sea

   $$z = x^2y^3 = x^2(100 - x)^3 =: f(x).$$

Se trata de hallar $x_M \in I = [0, 100]$ tal que $f(x_M) = \max_{x \in I} f(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(100-x)^3 - 3x^2(100-x)^2 \\ &= x(100-x)^2[2(100-x) - 3x] \\ &= 5x(100-x)^2(40-x), \\ f''(x) &= 20(100-x)\left(x^2 - 50x + 1000\right) \\ &= 20(100-x)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,, \end{aligned}$$

con $x_1 = 40 - 10\sqrt{6} \approx 15.505$; y $x_2 = 40 + 10\sqrt{6} \approx 64.495$.

Como f es derivable en $]0, 100[$, el único punto crítico en este intervalo es 40. Los "candidatos" a extremos son entonces 0, 40 y 100.

Calculamos la tabla de valores de f:

x	$f(x)$
100	0
40	345 600 000
0	0

De la tabla de valores de f se deduce que:

$$\max_{x \in [0,100]} f(x) = f\,(40) = 345\,600\,000.$$

Para $x = 40$, $y = 100 - 40 = 60$. Los números buscados son entonces 40 y 60.

b) Hallar dos números no negativos tales que su producto sea $\dfrac{9}{4}$ y su suma sea máxima.

Solución. Sean $x, y \in [0, +\infty[$ los números buscados. Como $xy = \dfrac{9}{4}$, se tiene que $y = \dfrac{9}{4}x^{-1}$. Como $xy > 0$, tendremos que $x > 0$ e $y > 0$. Sea

$$z = x + y = x + \frac{9}{4x} =: f(x).$$

Se quiere hallar $x_m \in I =]0, +\infty[$ tal que

$$f\,(x_m) = \min_{x \in I} f(x).$$

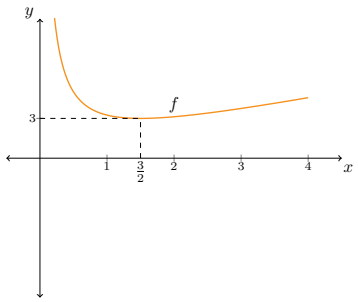


Figura 3.30: Ecuación $y = x + \dfrac{9}{4x}$ y su punto mínimo.

Como I no es cerrado y acotado, para resolver el problema básico de optimización determinaremos la imagen de f :

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{4x^2} = \frac{4x^2 - 9}{4x^2}.$$

Como f es derivable en I, el único punto crítico en I es $\dfrac{3}{2}$. El análisis de signos de f' lo resumimos en la siguiente tabla:

x	0		$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$
Esquema		$\searrow$	Mín loc	$\nearrow$

Por otro lado tenemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Como f es continua en I y es monótona en $\left]0, \frac{3}{2}\right]$ y en $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$, se tiene que:

$$f\left(\left]0, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right[= [3, +\infty[;$$
$$f\left(\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\right) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right[= [3, +\infty[;$$

por lo que:

$$f(I) = f\left(\left]0, \frac{3}{2}\right]\right) \bigcup f\left(\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\right) = [3, +\infty[.$$

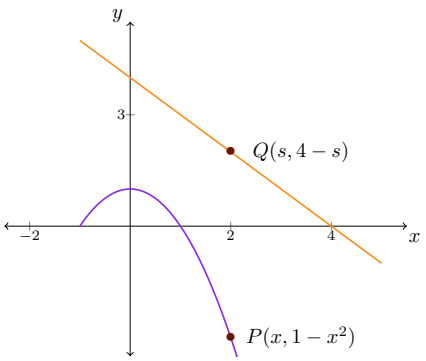
Se tiene entonces que:

$$\min_{x\in I} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 3.$$

Si $x = \frac{3}{2}$, también $y = \frac{3}{2}$. Los dos números buscados son entonces iguales a $\frac{3}{2}$.

3. Dada la recta l de ecuación $y = 4 - x$ y la parábola p de ecuación $y = 1 - x^2$, halle los puntos $P \in l$ y $Q \in p$ más cercanos entre sí.

Solución. Sean x y s las abscisas de P y Q, respectivamente. Entonces $P(x, 1-x^2)$; $Q(s, 4-s)$. Debemos minimizar la distancia entre P y Q; lo que equivale a minimizar el cuadrado de la misma, al que notaremos z. Entonces $z = (s-x)^2 + \left[(4-s) - (1-x^2)\right]^2 =: F(x,s)$. Como la función objetivo F tiene dos variables procedemos en dos etapas:



Primera Etapa:

Tomaremos un punto arbitrario pero fijo de la parábola, que notaremos $P_x\left(x, 1-x^2\right)$, con $x \in \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo, y buscaremos el punto $Q_x \in l$ más cercano. Es decir, resolveremos el problema:

> Hallar $s_x \in \mathbb{R}$ tal que
> $g(s_x) = \min_{s\in\mathbb{R}} g(s)$,
> con $g(s) = F(x,s) = (s-x)^2 + \left(3 + x^2 - s\right)^2$.

Como g es derivable en $\mathbb{R}$, los puntos críticos son los de derivada nula:

$$g'(s) = 2(s-x) - 2\left(3 + x^2 - s\right)$$
$$= 2\left[2s - \left(x^2 + x + 3\right)\right].$$

Entonces para que $g'(s) = 0$ se debe tomar:

$$s = \frac{x^2 + x + 3}{2},$$

en todos los reales, entonces existe solo el punto crítico $\frac{x^2 + x + 3}{2}$, donde se alcanzará un mínimo local, dado que para todo s, la segunda derivada es $g''(s) = 4 > 0$.

Como es el único extremo local en $\mathbb{R}$, también será global. Así $s_x = \frac{x^2 + x + 3}{2}$, y

$$\begin{aligned} g(s_x) &= g\left(\frac{x^2 + x + 3}{2}\right) \\ &= \min_{s \in \mathbb{R}} g(s) \\ &= \left(\frac{x^2 + x + 3}{2} - x\right)^2 + \left(3 + x^2 - \frac{x^2 + x + 3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 - x + 3\right)^2. \end{aligned}$$

$g(s_x)$ es el cuadrado de la mínima distancia entre $P_x\left(x, 1 - x^2\right)$ y la recta l. El punto de l más cercano a P_x será el punto:

$$Q_x(s_x, 4 - s_x) = \left(\frac{x^2 + x + 3}{2}, \frac{5 - x - x^2}{2}\right).$$

Segunda etapa:

Buscamos $x_m \in \mathbb{R}$ tal que la distancia entre $P_x\left(x, 1 - x^2\right) \in p$ y $Q_x \in l$ sea mínima. Es decir, resolveremos el problema:

$$\left|\begin{array}{l} \text{Hallar } x_m \in \mathbb{R} \text{ tal que} \\ h(x_m) = \min_{x \in \mathbb{R}} h(x), \\ \text{con } h(x) = \sqrt{g(s_x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^2 - x + 3\right) \end{array}\right.$$

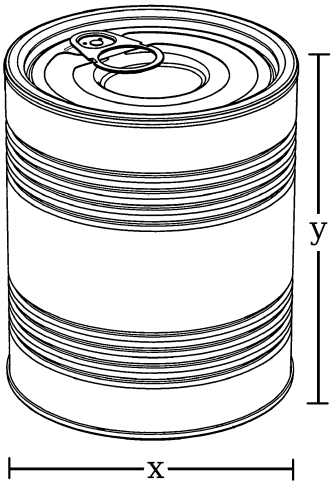
Como h es derivable en $\mathbb{R}$, los puntos críticos son los de derivada nula

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x - 1).$$

tenemos que $h'(x) = 0$ si y solo si $2x - 1 = 0$; y esto ocurre si y solo si $x = \frac{1}{2}$. Entonces en $\mathbb{R}$ solo tenemos el punto crítico $\frac{1}{2}$ donde se alcanzará un mínimo local dado que $h''(x) = \sqrt{2} > 0$.

Los puntos buscados serán entonces $P_x\left(x, 1 - x^2\right)$ y $Q_x\left(\frac{x^2 + x + 3}{2}, \frac{5 - x - x^2}{2}\right)$, con $x = \frac{1}{2}$, es decir los puntos $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ y $Q\left(\frac{15}{8}, \frac{17}{8}\right)$.

4. Se desea elaborar tarros cilíndricos de un litro para conservas de duraznos. ¿Qué dimensiones tendrá cada tarro para que el costo por el metal utilizado sea mínimo?



Solución. Sean $x[dm]$ e $y[dm]$, el diámetro de la base y la altura del tarro respectivamente. Si V[litros] es el volumen del tarro, entonces:

$$V = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 y = 1,$$

de donde $y = \dfrac{4}{\pi x^2}$.

El costo del metal será directamente proporcional a la suma A del área lateral A_L y al doble del área A_B de las bases $(A = A_L + 2A_B)$. Como:

$$A_L = \pi xy = \pi x \frac{4}{\pi x^2} = \frac{4}{x};$$

y

$$A_B = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{4}.$$

Tendremos

$$A = \frac{4}{x} + \frac{\pi}{2}x^2 =: f(x).$$

Al ser x el diámetro de la base, si bien matemáticamente $x \in \mathbb{R}$, por razones prácticas podemos considerar que $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ (un tarro de diámetro menor que 5 cm y mayor a 20 cm no tiene sentido). Debemos entonces resolver el problema básico de optimización:

$$\left|\begin{array}{l} \text{Hallar } x_m \in I = \left[\frac{1}{2}, 2\right] \text{ tal que} \\ f(x_m) = \min\limits_{x \in I} f(x), \\ \text{con} f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{\pi}{2}x^2. \end{array}\right.$$

Como f es continua en I y derivable en $\left]\dfrac{1}{2}, 2\right[$, los "candidatos" a ser puntos donde se alcancen los extremos son $\dfrac{1}{2}$, 2 y los puntos críticos ubicados en $\left]\dfrac{1}{2}, 2\right[$, donde la derivada se anule.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4}{x^2} + \pi x \\ &= \frac{\pi x^3 - 4}{x^2}. \end{aligned}$$

Resolviendo $f'(x) = 0$ obtenemos que $x = \sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}} =: x_1 \in \left]\dfrac{1}{2}, 2\right[$ es el único punto crítico en $\left]\dfrac{1}{2}, 2\right[$.

Se concluye entonces que

$$\min_{x \in I} f(x) = f(x_1) = 6\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}.$$

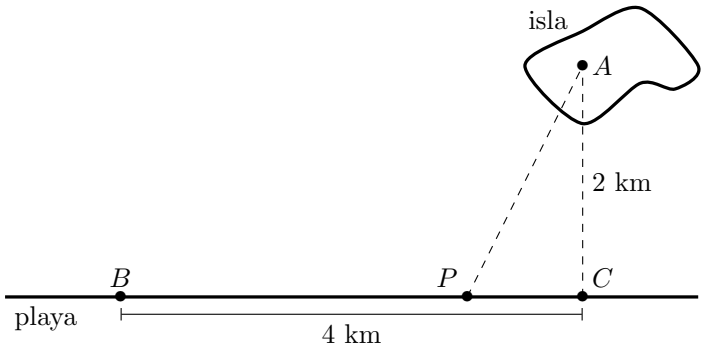
A continuación se muestra la tabla de valores de f:

x	$f(x)$
2	$2 + 2\pi \approx 8.28$
x_1	$6\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4}} \approx 5.54$
$\dfrac{1}{2}$	$8 + \dfrac{\pi}{8} \approx 8.39$

Al mismo resultado se llega si se toma $I =]0, +\infty[$. En este caso, puesto que f es decreciente en $]0, x_1[$ y creciente en $[x_1, +\infty[$, dados los signos de la derivada de f en estos intervalos, f alcanza en x_1 un mínimo local. Como es el único extremo local, también será global. El diámetro buscado es entonces $x_1 = \sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}} \approx 1.084$. La altura correspondiente es $y_1 = \dfrac{4}{\pi x_1^2} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$. Curiosamente la altura y el diámetro son iguales a aproximadamente 1.084 cm.

5. Un joven puede remar a razón de dos kilómetros por hora y correr a seis kilómetros por hora. Si está en el punto A de la isla que está a dos kilómetros del punto C de la playa y desea llegar lo antes posible al punto B, situado en la playa de enfrente, que está a dos kilómetros del punto C en la playa, ¿hasta qué punto P de la playa debe remar para luego correr desde P hasta B? ¿En cuánto tiempo llegará?

Figura 3.31: Bosquejo de la situación expuesta.



Solución. Sean

$$\begin{aligned} V_{AP}\ [\text{km/h}] &= 2\ [\text{km/h}] = \text{velocidad al remar de } A \text{ a } P.\\ V_{PB}\ [\text{km/h}] &= 6\ [\text{km/h}] = \text{velocidad al correr de } P \text{ a } B.\\ x\ [\text{km}] &= \text{distancia de } C \text{ a } P.\\ t_{AP}\ [\text{h}] &= \text{tiempo de navegación.}\\ t_{PB}\ [\text{h}] &= \text{tiempo de carrera.}\\ t\ [\text{h}] &= \text{tiempo del recorrido total.} \end{aligned}$$

Como la distancia de A a P es:

$$|AP| = \sqrt{4 + x^2},$$

entonces $t_{AP} = \dfrac{|AP|}{V_{AP}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4 + x^2}$.

Por otra parte, $t_{PB} = \dfrac{|BP|}{V_{BP}} = \dfrac{4 - x}{6}$.

Por consiguiente

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{4 + x^2} + \frac{4 - x}{6} =: f(x);$$

con $x \in [0,4]$.
Se trata entonces de hallar $x_m \in I = [0,4]$ tal que

$$f(x_m) = \min_{x \in I} f(x).$$

Como f es continua en I y derivable en $]0,4[$, los "candidatos" a puntos donde se alcanzan los extremos son 0, 4 y los puntos críticos ubicados en $]0,4[$. Estos últimos serán aquellos donde f' se anule dado que f es derivable en $]0,4[$. Como

$$f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{6},$$

entonces tenemos que para que $f'(x) = 0$ se debe cumplir que:

$$\sqrt{4+x^2} = 3x, \quad \text{que equivale a}$$
$$8x^2 = 4,$$

por lo cual $x^2 = \frac{1}{2}$ y al despejar obtenemos que $x \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.
Verificamos que $\frac{1}{\sqrt{2}} \in]0,4[$ y que $-\frac{1}{\sqrt{2}} \notin]0,4[$, por lo que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ es el único punto crítico en $]0,4[$.

De la tabla de valores de f se concluye entonces que:

$$\min_{x \in [0,4]} f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

La conclusión a la que llegamos es que el joven deberá remar hasta el punto P ubicado aproximadamente a 1 609 metros del punto C y luego correr hacia B.

Calculamos la tabla de valores de f:

x	$f(x)$
4	$\sqrt{5} \approx 2.236$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}+1\right) \approx 1.609$
0	$\frac{5}{3} \approx 1.667$

Ejercicios Propuestos

Estos ejercicios fueron tomados de los textos [10, 11, 5].

1. Hallar los puntos extremos de $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$, para $-2 < x < 1$.
2. Hallar los puntos extremos de la gráfica de $x^2 + xy + y^2 = 3$.
3. ¿Qué número positivo minimiza la suma entre él y su recíproco?.
4. Se necesita cortar un alambre de 100 cm de longitud en dos pedazos. Un pedazo deberá doblarse para formar un cuadrado, mientras que el otro formará un círculo. ¿En dónde debería hacerse el corte si la suma de las dos áreas debe ser mínima?
5. Una bodega rectangular tendrá dos cuartos rectangulares separados por una pared interior y el piso deberá tener 5 000 metros cuadrados de área. El costo de las paredes exteriores es de 150 dólares por metro lineal, y el costo de las paredes interiores es de 90 dólares por metro lineal. Hallar las dimensiones de la bodega menos costosa.

3.6 Regla de L'Hopital

Teorema 34: Regla de L'Hôpital

Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, y si

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, \infty\},$$

entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nota: El resultado puede aplicarse si en vez de a se tiene $a^-, a^+, -\infty$ o $+\infty$.

Ejercicios

1. Calcule los siguientes límites

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^3 \operatorname{sen} x}$.

   Solución.

$$\begin{aligned} L = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^3 \operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x^2\left(3\operatorname{sen} x + x\cos(x)\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \left[2\frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x^2} \cdot \frac{x}{3\operatorname{sen} x + x\cos x}\right] \\ &= \lim_{x\to 0} 2\frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{3\operatorname{sen} x + x\cos x}. \end{aligned}$$

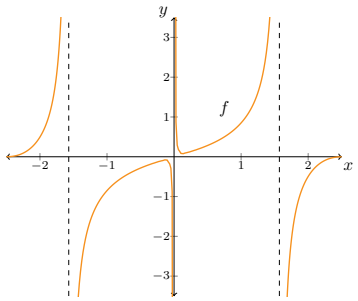


Figura 3.32: Función f de ecuación $y = \frac{1-\cos^2(x)}{x^3 \operatorname{sen}(x)}$.

Además si llamamos $t = x^2$ tenemos que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$; y,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{3\operatorname{sen} x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4\cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{1}{4},$$

entonces tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^3 \operatorname{sen} x} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

   b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\arctan(x)}$.

   Solución.

$$\begin{aligned} L = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\arctan(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{1+x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0} \left[\left(1+x^2\right)\cos x\right] = 1. \end{aligned}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^{\frac{3}{2}}\operatorname{sen} x}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen} x + x\cos x\right)}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen} x + x\cos x\right) + x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}\cos x - x\operatorname{sen} x\right)}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen} x}{\frac{3}{2}\operatorname{sen} x - 2x^2\operatorname{sen} x + 6x\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\left(\frac{3}{2}-2x^2\right) + 6\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x}\\
&= \frac{0}{\frac{3}{2}+6}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

por las propiedades algebraicas de los límites y puesto que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

En conclusión:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

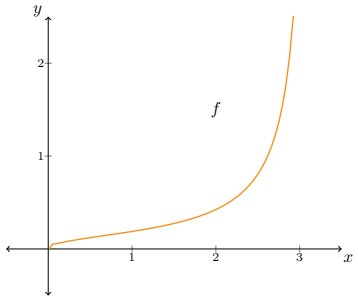


Figura 3.33: Función f de ecuación $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

2. Demuestre la regla de L'Hopital si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una indeterminación de tipo $\dfrac{0}{0}$ y si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Use el teorema general del valor intermedio para $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Demostración. Usaremos el Teorema General del Valor Intermedio. Se tiene que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que f y g son derivables y por ende continuas en $]a-r, a+r[$.

Si aplicamos el Teorema del Valor Intermedio en el intervalo $[a, x]$ con $x \in]a, a+r[$, se tiene que existe $c_x \in]a, x[$ tal que

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{3.2}$$

Por la continuidad de f y g en a tendremos que $f(a) = g(a) = 0$; y como $a < c_x < x$, por el Teorema del sánduche tendremos

además que $\lim_{x\to a^+} c_x = a$. Tomamos entonces en la igualdad (3.2) el $\lim_{x\to a^+}$ y obtenemos que:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{t\to a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

con el cambio de variable $t = c_x$ en el límite de la derecha. Es decir que:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

De manera similar se tiene que

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

con lo que se concluye la demostración. □

Ejercicios Propuestos

Calcule los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
4. $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$.
5. $\lim_{y\to x} \frac{x^n - y^n}{x - y}$, con $n \in \mathbb{N}$.

Bibliografía

T. Apostol. *Calculus; One variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, volume 1. Wiley, 2007.

E. Cueva, A. Merino, and J. Trujillo. *Cálculo en una variable: Resumen y Ejercicios Resueltos*. Escuela Politécnica Nacional, 2012.

B. Demidovich. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Editorial Mir Moscú, 1980.

J. Douchet and B. Zwahlen. *Calcul différentiel et intégral: fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), 2006.

S. Farrand and N. Jim Poxon. *CALCULO*. Harcourt Brace Jovanovich, 1988.

R. Larson and B. Edwards. *Calculus*. Brooks Cole, 10th edition, 2013.

O. Lozano and C. Rojas. *Introducción teórica, ejercicios y problemas resueltos de cálculo diferencial*. Bucaramanga Universidad Pontificia Bolivarina, 2011.

G. Rojas, J. Trujillo, and F. Barba. *Cálculo en una variable - Cálculo Diferencial*. EPN Editorial, 2017.

M. Spivak and B.F. Marqués. *Cálculo infinitesimal*. Reverté, 1996.

J. Stewart. *Calculus*. Brooks Cole, 8th edition, 2015.

D. Zill and W. Wright. *Calculus: Early Transcendentals*. Jones & Bartlett Publishers, 4th edition, 2011.